ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 10 MARS 1919.

PRÉSIDENCE DE M. LÉON GUIGNARD.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

HYDRODYNAMIQUE. — *Sur l'écoulement des fluides.* Note de M. L. LECORNU.

Hugoniot a publié en 1886, dans les *Comptes rendus* (t. 103), une Note intitulée : *Sur un théorème relatif au mouvement permanent et à l'écoulement des fluides.* On y lit que « dans le mouvement permanent d'un fluide, la vitesse au point du filet où se produit le maximum de contraction est égale à la vitesse du son correspondant à la pression et à la densité en ce point ».

Ainsi énoncé sans restriction, le théorème est inexact : on le reconnaît immédiatement en remarquant qu'il ne saurait être applicable au cas d'un écoulement lent comme celui qui se produit à la sortie d'un réservoir dont la pression excède très peu celle de l'atmosphère. D'ailleurs, en examinant la démonstration de Hugoniot, on constate qu'elle ne suppose pas plutôt l'existence d'un minimum de section que celle d'un maximum : or il est invraisemblable, *a priori*, que, dans une section d'aire maximum, la vitesse du son soit jamais atteinte.

En fait, il existe, comme nous allons le voir, un autre état possible du fluide dans les étranglements ou les renflements d'un filet.

Soit m le débit du filet considéré, c'est-à-dire la masse qui s'écoule dans l'unité de temps; soient ρ, v la densité et la vitesse en un point où la section est ω. On a l'équation de continuité :

$$\rho v \omega = m. \tag{1}$$

Appelons, d'autre part, R l'intégrale indéfinie $\int \frac{dp}{\rho}$ où p désigne la pression supposée dépendre de la seule variable ρ. L'hydrodynamique fournit la seconde équation :

$$(2) \qquad v^2 = 2(R_0 - R),$$

où l'indice *zéro* se rapporte à la densité ρ_0 du fluide contenu dans le réservoir qui alimente l'écoulement.

La vitesse a du son, pour une densité ρ, est, comme l'on sait, fournie par la formule

$$(3) \qquad a^2 = \frac{dp}{d\rho} = R'\rho.$$

Remarquons en passant que, d'après cette formule, la dérivée R' est essentiellement positive.

Donnons-nous le débit m et différentions les équations (1) et (2) le long du filet. Il vient, en tenant compte de (3) :

$$\rho\, dv + v\, d\rho = -m \frac{d\omega}{\omega^2} = -\rho v \frac{d\omega}{\omega},$$
$$\rho v\, dv + a^2 d\rho = 0;$$

d'où

$$(4) \qquad \begin{cases} (a^2 - v^2)\, d\rho = \rho v^2 \dfrac{d\omega}{\omega}, \\ (a^2 - v^2)\, dv = -a^2 v \dfrac{d\omega}{\omega}. \end{cases}$$

Ces équations montrent que si, comme nous l'admettons, la densité et la pression varient d'une façon continue, la vitesse du son ne peut être atteinte que là où s'annule $d\omega$, c'est-à-dire pour un maximum ou un minimum de section; mais il n'est pas vrai de dire que, réciproquement, si $d\omega$ s'annule, on a nécessairement $a - v = 0$: car il peut aussi arriver que, dans une pareille section, ce soient dv et $d\rho$ qui s'annulent.

Pour trancher la question, différentions une seconde fois (en prenant pour variable indépendante le chemin parcouru sur le filet), puis annulons $d\omega$. Nous trouvons :

$$(5) \qquad \begin{cases} (a^2 - v^2)\, d^2\rho + 2(a\, da - v\, dv)\, d\rho = \rho v^2 \dfrac{d^2\omega}{\omega}, \\ (a^2 - v^2)\, d^2 v + 2(a\, da - v\, dv)\, dv = -a^2 v \dfrac{d^2\omega}{\omega}. \end{cases}$$

Dans l'hypothèse $v = a$, il reste simplement

$$2(da - dv)\,d\rho = \rho a \frac{d^2\omega}{\omega},$$

$$2(da - dv)\,dv = - a^2 \frac{d^2\omega}{\omega}.$$

Si, de plus, $d\omega = 0$, d'où $\rho\, dv + \rho\, dv = 0$, il vient

$$(6) \qquad 2\left(\frac{da}{d\rho} + \frac{a}{\rho}\right) d\rho^2 = \rho a \frac{d^2\omega}{\omega}.$$

La dérivée $\frac{da}{d\rho}$ est positive : car la vitesse du son croît avec la densité. C'est là, si l'on veut, un fait d'expérience ; on le vérifie d'ailleurs aisément au moyen de l'équation exprimant p en fonction de ρ dans la transformation adiabatique d'un gaz, parfait ou non.

D'après cela, l'équation (6) n'est possible que si $d^2\omega$ est positif, c'est-à-dire si l'on a affaire à un minimum de section. En cas de maximum, il faut, dans les équations (4), exclure la solution $v = a$, ce qui conduit à annuler $d\rho$ et dv. Les équations (5) se réduisent ainsi à

$$(7) \qquad \begin{cases} (a^2 - v^2)\,d^2\rho = \rho v^2 \dfrac{d^2\omega}{\omega}, \\ (a^2 - v^2)\,d^2 v = - a^2 v \dfrac{d^2\omega}{\omega}; \end{cases}$$

$d^2\omega$ étant positif, on voit que $d^2\rho$ et $-d^2v$ ont le signe de $a^2 - v^2$. Il en résulte qu'à un maximum de section correspondent un minimum de densité et un maximum de densité, ou inversement, suivant que la vitesse en cet endroit est inférieure ou supérieure à celle du son.

Il reste à voir ce qui se passe quand le filet présente un minimum de section.

Remarquons d'abord que, pour une section donnée, la vitesse du son correspond toujours à un maximum de débit. Ce débit est, en effet, $\omega\rho\sqrt{2(R_0 - R)}$, expression dont la dérivée par rapport à ρ s'annule pour $\sqrt{R_0 - R} = \frac{R'\rho}{2\sqrt{R_0 - R}}$, d'où $2(R_0 - R) = R'\rho$, c'est-à-dire $v^2 = a^2$. Il s'agit bien là d'un maximum et non pas d'un minimum ; car, en prenant la dérivée seconde de $\rho\sqrt{R_0 - R}$, puis remplaçant $2(R_0 - R)$ par a^2, on trouve $-\sqrt{2}\frac{da}{d\rho}$, expression négative. Observons aussi que l'équation

$2(R_0 - R) = R'\rho$, ou $2R_0 = R'\rho + 2R$, n'admet, quand on se donne ρ_0, qu'une seule racine positive ρ_1, comprise entre zéro et ρ_0, attendu que la fonction $R'\rho + 2R$, constamment croissante avec ρ, ne prend qu'une seule fois la valeur $2R_0$.

Ceci posé, soient ω_1 et ω_2 $(\omega_1 < \omega_2)$ deux sections contractées d'un même filet. Elles ne peuvent posséder toutes les deux la densité ρ_1, sans quoi leurs débits seraient inégaux. Cette densité ne peut se réaliser que dans la section ω_1, qui atteint alors son débit maximum; la densité ρ_2 dans la section ω_2 résulte de l'équation $\omega_2\rho_2\sqrt{R_0 - R_2} = \omega_1\rho_1\sqrt{R_0 - R_1}$ et correspond à une vitesse différente de celle du son.

Il ressort de cette discussion que, quel que soit le nombre de sections dilatées ou contractées, c'est uniquement dans la plus petite des sections contractées que peut être atteinte la vitesse du son.

J'ajouterai encore la remarque suivante. Considérons une tuyère pourvue d'un seul col et adaptée à un réservoir où règne la densité ρ_0. Tant que ρ_0 ne dépasse que légèrement la densité du milieu ambiant, l'étranglement est traversé avec une vitesse inférieure à celle du son, et la densité, malgré la présence de l'étranglement, décroît entièrement dans tout le parcours de cette tuyère. Si l'on augmente peu à peu ρ_0, il arrive un moment où la vitesse du son est atteinte dans le col; dès lors la densité devient croissante depuis le col jusqu'au débouché extérieur. On en conclut qu'à cet instant critique se produit, en aval du col, un brusque changement de régime : dans chacune des sections d'aval, la densité éprouve une variation, infiniment petite au voisinage du col, mais de grandeur finie pour les sections situées à distance finie de celui-ci. On sait que de pareilles discontinuités de régime se rencontrent fréquemment dans la dynamique des fluides gazeux.

ASTRONOMIE. — *Sur l'étude des perturbations de l'axe optique d'une lunette méridienne en direction.* Note [1] de M. **Maurice Hamy**.

La détermination des constantes m, n, U_0, définies dans ma Communication du 24 février, peut être conduite de la façon suivante [2] :

---

[1] Séance du 24 février 1919.

[2] Les renvois aux formules dont les numéros d'ordre sont inférieurs à (12) et aux figures, correspondent à ma première Communication du 24 février publiée dans les *Comptes rendus* du 3 mars 1919.

Détermination de U_0. — On peut déterminer U_0 par des observations faites sur deux collimateurs C′ et C″, disposés à 180° l'un de l'autre, de part et d'autre de la lunette, et réglés de façon à avoir leurs axes optiques parallèles et très peu inclinés sur le méridien.

Désignons par V′ la lecture de la tête de vis micrométrique, pour les pointés faits sur l'un des collimateurs C′ dont les rayons, faisant l'angle α avec le méridien, sont supposés avoir la déclinaison $\mathcal{D}$. Appelons, d'autre part, l' la lecture faite sur l'image du petit trou o de la figure 2, fournie par les rayons déviés par les prismes à double réflexion. Pour le second collimateur C″, les rayons font l'angle $-\alpha$ avec le méridien et possèdent la déclinaison $\pi + \mathcal{D}$. Appelant V″ et l'' les valeurs respectives des paramètres V et l de la formule (11), pour les observations correspondant au collimateur C″, on a, d'après ce qui précède, pour le premier collimateur,

$$\alpha = m\cos\mathcal{D} + n\sin\mathcal{D} + k(V' - U_0) - kl';$$

pour le second,

$$-\alpha = -m\cos\mathcal{D} - n\sin\mathcal{D} + k(V'' - U_0) - kl'',$$

d'où l'on tire immédiatement

$$(12) \qquad 2U_0 = k(V' + V'') - k(l' + l''),$$

formule dont le second membre est connu.

Détermination de n. — U_0 connu, n se détermine, comme à l'ordinaire, en appliquant l'équation (10) à une étoile polaire, puis à une étoile équatoriale.

Appelant $\mathcal{A}_1$ l'ascension droite de la polaire, $\mathcal{D}_1$ sa déclinaison, t_1 l'heure de l'observation donnée par la pendule, V_1 la lecture de la tête de vis micrométrique indiquant la position du fil auquel est faite l'observation, l_1 la lecture l correspondant à la déclinaison $\mathcal{D}_1$, on a

$$\mathcal{A}_1 = t_1 + Cp + m + n\,\text{tang}\,\mathcal{D}_1 + k(V_1 - U_0)\,\text{séc}\,\mathcal{D}_1 - kl_1\,\text{séc}\,\mathcal{D}_1.$$

On a de même, pour une étoile équatoriale,

$$\mathcal{A}_2 = t_2 + Cp + m + n\,\text{tang}\,\mathcal{D}_2 + k(V_2 - U_0)\,\text{séc}\,\mathcal{D}_2 - kl_2\,\text{séc}\,\mathcal{D}_2.$$

Retranchant ces deux relations membre à membre, on forme une équation où tout est connu sauf n.

Détermination de m. — Cette détermination se fait après avoir observé

le nadir. Le nadir étant un point du méridien, si l'on appelle V_N la lecture de la tête de vis micrométrique, quand le fil coïncide avec son image réfléchie, l'angle f, donné par la formule (11), est alors nul, si l'on y remplace V par V_N. On a donc, en faisant $\mathcal{D} = -(\pi - \varphi)$, φ désignant la latitude,

$$m \cos\varphi + n \sin\varphi = k(V_N - U_0 - l_N),$$

formule dont le second membre est connu et qui peut s'écrire, en tenant compte de l'équation (12),

$$(13) \qquad m \cos\varphi + n \sin\varphi = k\left(V_N - \frac{V' + V''}{2} - l_N + \frac{l' + l''}{2}\right).$$

D'après la formule (12), la formule (10) peut se mettre elle-même sous la forme

$$(14) \qquad \mathcal{A} = t + Cp + m + n \operatorname{tang}\mathcal{D} + k\left(V - \frac{V' + V''}{2} - l + \frac{l' + l''}{2}\right)\operatorname{séc}\mathcal{D}.$$

Les formules (13) et (14) donnent la solution complète du problème que nous nous étions proposé de résoudre. Elles sont indépendantes de la direction initiale $\mathcal{D}_0$ de la lunette, dont nous avons parlé, dans notre Communication du 24 février, pour exposer clairement la question. Elles montrent de quelle façon interviennent les pointés exécutés, avec le fil mobile de la lunette méridienne, sur l'image du petit trou o, disposé au foyer du collimateur C de la figure 2, pour corriger les effets des irrégularités des tourillons et de la flexion.

Remarque I. — Nous avons admis, pour arriver à ce résultat, que l'ensemble du collimateur C de la figure 2 et de la lunette méridienne reste stable, au cours des opérations. Il convient de montrer comment on peut s'affranchir de cette condition. Reportons-nous à la formule (9) et remplaçons-y $a - \mu_0$ par a' et $b - \nu_0$ par b'. Elle prend la forme

$$\varepsilon = k(l - l_0) + a'(\cos\mathcal{D} - \cos\mathcal{D}_0) + b'(\sin\mathcal{D} - \sin\mathcal{D}_0).$$

Si tout le système est stable, a', b' et b_0 restent constants, au cours des opérations. Si ces paramètres varient un peu et se changent a' en A', b' en B', à un moment donné, il entrera d'autres lectures L et L_0 à la place de l et l_0 dans la formule, en sorte qu'on aura aussi, pour la déclinaison $\mathcal{D}$,

$$\varepsilon = k(L - L_0) + A'(\cos\mathcal{D} - \cos\mathcal{D}_0) + B'(\sin\mathcal{D} - \sin\mathcal{D}_0),$$

ε ne changeant pas, puisque c'est la variation d'inclinaison de l'axe optique de la lunette, sur le méridien, quand on passe de la déclinaison $\mathcal{D}_0$ à la déclinaison $\mathcal{D}$, qui ne dépend pas de la position relative de la lunette et du collimateur C. Retranchant ces deux relations et posant

$$z_0 = -k(l_0 - L_0) - (a' - A')\cos\mathcal{D}_0 - (b' - B')\sin D_0$$

on obtient

$$k(l - L) + (a' - A')\cos\mathcal{D} + (b' - B')\sin\mathcal{D} + z_0 = 0. \tag{15}$$

Appliquant cette relation à trois directions $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, déjà considérées au début des opérations et pour lesquelles $(l - L)_1$, $(l - L)_2$, $(l - L)_3$ sont, par conséquent, connus on a

$$(16)\quad \begin{cases} k(l - L)_1 + (a' - A')\cos\mathcal{D}_1 + (b' - B')\sin\mathcal{D}_1 + z_0 = 0, \\ k(l - L)_2 + (a' - A')\cos\mathcal{D}_2 + (b' - B')\sin\mathcal{D}_2 + z_0 = 0, \\ k(l - L)_3 + (a' - A')\cos\mathcal{D}_3 + (b' - B')\sin\mathcal{D}_3 + z_0 = 0. \end{cases}$$

Les quantités k, $(a' - A')$, $(b' - B')$, z_0, non nulles simultanément, figurent au premier degré et d'une façon homogène dans les équations (15) et (16), il s'ensuit qu'on a

$$\begin{vmatrix} l - L & \cos\mathcal{D} & \sin\mathcal{D} & 1 \\ (l - L)_1 & \cos\mathcal{D}_1 & \sin\mathcal{D}_1 & 1 \\ (l - L)_2 & \cos\mathcal{D}_2 & \sin\mathcal{D}_2 & 1 \\ (l - L)_3 & \cos\mathcal{D}_3 & \sin\mathcal{D}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

équation d'où l'on tirera l connaissant L. C'est, en effet, l qui est l'inconnue, puisqu'il faut ramener les observations faites, au cours des expériences, à ce qu'elles auraient été si le collimateur C était resté stable.

En résumé, il suffit de répéter, de temps à autre, dans trois directions de repère arbitrairement choisies, les mesures faites au foyer de la lunette méridienne, sur l'image de l'ouverture o du collimateur C (*fig.* 2), pour pouvoir ramener toutes les observations à ce qu'elles auraient été si le système formé par la lunette et ce collimateur était demeuré invariable.

Remarque II. — La formule (9), sur laquelle repose la méthode qui a été exposée ci-dessus, suppose elle-même essentiellement la constance de la déviation angulaire des prismes à double réflexion, dans toutes les orientations de la lunette méridienne. Si, pour une cause quelconque, cette dévia-

tion venait à subir de faibles changements, notre point de départ serait inexact. On peut se mettre à l'abri d'incertitudes de ce genre, en disposant un second collimateur et un second train de prismes, identiques à ceux représentés (*fig.* 2), symétriquement par rapport au méridien.

Nous allons voir, en effet, qu'en observant, au micromètre de la lunette méridienne, les deux images venant de l'un et l'autre collimateur, et en prenant la moyenne des lectures, on élimine complètement l'erreur dont il a été question ci-dessus, en faisant en sorte que les causes pouvant amener les déformations des prismes agissent symétriquement sur l'un et l'autre train.

Dans l'hypothèse où nous nous plaçons, la normale p au méridien dont il a été question pour établir la formule (9), après réflexions à travers les prismes du premier train, c'est-à-dire la droite NS de la figure 4, ne fait pas un angle constant avec le méridien, quand la déclinaison de la lunette varie. Il en résulte que l'on devra ajouter un terme correctif variable Θ à la formule (9), pour l'un des trains, et un terme correctif égal et de signe contraire, pour l'autre train, en raison de la symétrie des choses.

Désignant par $l_0^{(1)}$, $l^{(1)}$ les lectures faites à la lunette méridienne, sur l'image de la petite ouverture o (*fig.* 2), fournie par le premier train de prismes et observée dans les deux directions $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}$ de la lunette; appelant $l_0^{(2)}$, $l^{(2)}$ les lectures analogues pour le second train; posant enfin $a' = a - \mu_0$, $b' = b - \nu_0$ et affectant les lettres a' et b' des indices 1 et 2, correspondant à l'un et l'autre train, l'équation (9) donne :

Pour le premier train :

$$\varepsilon = k(l_0^{(1)} - l^{(1)}) + a'_1(\cos\mathcal{D} - \cos\mathcal{D}_0) + b'_1(\sin\mathcal{D} - \sin\mathcal{D}_0) + \Theta;$$

Pour le second train :

$$\varepsilon = k(l_0^{(2)} - l^{(2)}) + a'_2(\cos\mathcal{D} - \cos\mathcal{D}_0) + b'_2(\sin\mathcal{D} - \sin\mathcal{D}_0) - \Theta.$$

Prenant la moyenne de ces équations et posant

$$\alpha' = \frac{a'_1 + a'_2}{2}, \qquad \beta' = \frac{b'_1 + b'_2}{2}, \qquad \frac{l^{(1)} + l^{(2)}}{2} = l, \qquad \frac{l_0^{(1)} + l_0^{(2)}}{2} = l_0,$$

il vient

$$\varepsilon = k(l_0 - l) + \alpha'(\cos\mathcal{D} - \cos\mathcal{D}_0) + \beta'(\sin\mathcal{D} - \sin\mathcal{D}_0),$$

où α' et β' sont des constantes, relation de même forme que l'équation (9). Il en résulte que les formules (13) et (14) sont encore valables, dans le cas

où la déviation des trains de prismes subit de légères modifications, à condition d'y remplacer les lectures micrométriques, désignées par la lettre *l*, affectée ou non d'accents, par les moyennes des lectures du tambour micrométrique correspondant aux deux images auxiliaires, fournies par les rayons qui ont traversé les deux trains de prismes à doubles réflexions. On est alors complètement exempt des variations possibles des angles de ces prismes.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Sur une réaction très sensible du cuivre. Application à l'analyse des cendres et des terres arables.* Note de MM. **L. Maquenne** et **E. Demoussy**.

Lorsqu'on traite par le ferrocyanure de potassium une solution chlorhydrique de cendres, suffisamment concentrée et soigneusement dépouillée de fer et de manganèse, on voit d'ordinaire la liqueur se teinter en rose jaunâtre, indice de la présence du cuivre. Mais dans la plupart des cas cette coloration n'est pas stable; elle s'atténue d'elle-même rapidement et finit par faire place à un trouble qui, par le repos ou la centrifugation, se résout en un précipité noirâtre, nuancé de brun ou de bleu, comme si la dissolution renfermait encore du fer.

En recherchant la cause de cette anomalie, nous avons reconnu qu'elle est due à la présence du zinc qui, comme on le sait, accompagne généralement le cuivre dans les organes végétaux. Si, en effet, on ajoute du ferrocyanure à une solution cuivrique très étendue, acidulée par l'acide chlorhydrique et additionnée d'une proportion variable de sulfate de zinc, on arrive à reproduire synthétiquement toutes ces apparences et même, quand le poids de zinc ajouté dépasse le double de celui du cuivre, à obtenir un précipité qui se rassemble par centrifugation en une masse d'un beau bleu outremer. Rien de semblable ne s'observe quand on mélange deux liqueurs acides tenant en suspension, l'une du ferrocyanure de cuivre, l'autre du ferrocyanure de zinc précipités isolément; le corps bleu n'apparaît que lorsqu'on opère sur une dissolution renfermant les deux métaux à la fois, ce qui prouve que la réaction qui lui donne naissance ne peut s'effectuer qu'entre sols et non entre gels. On a là un excellent exemple de l'influence qu'exerce l'état physique d'un colloïde sur ses aptitudes réactionnelles. C'est évidemment au mélange de ce composé cuprozincique bleu avec un excès de ferrocyanure de cuivre rouge qu'il faut attribuer la couleur rabattue du précipité qu'on obtient, comme nous l'avons dit plus

haut, quand on ajoute du ferrocyanure de potassium à une solution acide de cendres.

La coloration bleue qui se développe ainsi atteint son maximum d'intensité et de pureté lorsque le zinc est de 4 à 5 fois plus abondant que le cuivre; elle pâlit naturellement à mesure qu'on élève ce rapport, par suite de la formation de ferrocyanure zincopotassique en excès. Toujours plus intense, toutes choses égales d'ailleurs, que la teinte rosée qui se développerait sans zinc, elle apparaît encore dans des solutions étendues au point de ne plus rien donner de visible avec le ferrocyanure seul. C'est ainsi que, sous le volume de $1^{cm^3},5$ à 2^{cm^3}, elle est déjà forte avec $0^{mg},01$ de cuivre métallique; avec $0^{mg},005$ elle reste extrêmement nette et avec $0^{mg},0025$, autrement dit dans une solution renfermant seulement 1^{mg} à $1^{mg},5$ de cuivre par litre, la teinte bleue du précipité est encore perceptible dans de bonnes conditions, c'est-à-dire lorsque le cuivre et le zinc sont en proportions convenables et que la liqueur ne renferme pas de sels étrangers: les chlorures alcalins et surtout le chlorure d'ammonium sont en effet capables de l'affaiblir et même, à un certain degré de concentration, de la faire disparaître.

C'est donc la plus sensible de toutes les réactions minérales propres à caractériser de très petites quantités de cuivre; il importe seulement, pour qu'elle soit concluante, que la solution soit bien exempte d'acide nitrique et de fer; si l'on a quelque doute sur ce dernier point, il faut rassembler le précipité à la centrifugeuse, le délayer dans quelques gouttes d'une solution moyennement concentrée de chlorhydrate d'ammoniaque, le décolorer par un léger excès d'ammoniaque et enfin aciduler par un peu d'acide chlorhydrique: dans le cas du fer la coloration bleue réapparaît aussitôt, dans le cas du cuivre elle est remplacée par la couleur rose du ferrocyanure cuivrique, dilué dans un excès de ferrocyanure zincopotassique. On évite d'ailleurs toute incertitude en séparant d'abord le cuivre de sa solution acide par électrolyse.

La méthode est plus rapide que les procédés d'analyse classiques et n'exige que de très petites quantités de matière, ce qui est un avantage considérable quand on se propose de rechercher le cuivre dans les cendres de graines, dont la préparation est le plus souvent assez pénible. Voici alors comment nous opérons.

Les cendres (de 50^{mg} à 200^{mg}), préalablement calcinées, dans une capsule de quartz, en présence de quelques gouttes d'acide azotique et d'un léger excès d'acide sulfurique, pour parfaire leur comburation et insolubiliser la majeure partie du calcium, sont traitées par $1^{cm^3},5$ d'acide sulfurique à

5 pour 100; on maintient à l'ébullition pendant une vingtaine de minutes, en remplaçant l'eau qui s'évapore, pour transformer les pyrophosphates en orthophosphates, on transporte le liquide, avec les eaux de lavage, dans un petit tube bouché de 8^{mm} de diamètre et 70^{mm} à 75^{mm} de longueur, on centrifuge pour séparer les particules de silice et de sulfate de chaux restées en suspension et l'on soumet la liqueur, dont le volume doit être alors voisin de $2^{cm^3},5$, à l'électrolyse (6 à 8 milliampères pour une électrode de 2×10 millimètres). Après une douzaine d'heures on lave la cathode avec 3 gouttes d'acide nitrique chaud et un peu d'eau, on évapore, on calcine, on reprend par 3 gouttes d'acide chlorhydrique, on lave et l'on verse la solution dans un tube bouché semblable au précédent, en s'arrangeant de manière que le volume total du liquide ne dépasse pas 2^{cm^3}. On ajoute alors 2 gouttes [1] de sulfate de zinc à 1,104 pour 100 (quantité correspondante à $0^{mg},25$ de zinc) et 1 goutte de ferrocyanure de potassium à 10 pour 100, fraîchement préparé. Si le cuivre est abondant, auquel cas il était déjà visible sur la cathode à la fin de l'électrolyse, il se produit aussitôt une coloration rosée qui bientôt, surtout si l'on agite, passe au bleu franc; si la quantité de cuivre est inférieure à $0^{mg},01$, la coloration bleue apparaît d'emblée au bout de quelques minutes, et c'est alors le seul caractère qui permette d'affirmer la présence du cuivre au cours de ces opérations. La teinte que présente le précipité, rassemblé à la centrifugeuse, se laisse facilement comparer à celle de types de richesse connue, ce qui donne le moyen d'apprécier avec une certaine approximation le poids du cuivre qu'il renferme.

Remarque. — Les opérations qui viennent d'être décrites, et particulièrement les calcinations en présence d'acide azotique et d'acide sulfurique, doivent être toutes exécutées dans le quartz ou la porcelaine; les capsules de platine que l'on emploie d'ordinaire en pareil cas peuvent, en effet, céder aux acides et aux bisulfates, à chaud, plusieurs centièmes de milligramme de cuivre, c'est-à-dire une quantité très supérieure, en général, à celle que l'on recherche. Il est enfin nécessaire de s'assurer, par des expériences à blanc, que le cuivre trouvé provient bien des cendres et n'a pas été apporté par les réactifs, les poussières émanées des brûleurs ou toute autre cause accidentelle.

---

[1] Une seule goutte suffit quand il n'y a que très peu de cuivre : la coloration est alors plus forte.

En opérant ainsi nous avons trouvé dans un certain nombre de graines (blé, maïs, pois, haricots, ricin, aucuba, etc.), prises à l'état normal, des quantités de cuivre comprises entre 3^{mg} et 8^{mg} au kilogramme : chiffres qui n'ont d'intéressant que leur ordre de grandeur, puisque la minéralisation des plantes est sous la dépendance de la composition, essentiellement variable, du sol qui les a nourries. La même méthode permet, presque sans modification, de déceler et de doser approximativement le cuivre dans les terres arables; toutes celles que nous avons essayées en renferment, dans la proportion moyenne de 2^{mg} à 30^{mg} par kilogramme (cuivre attaquable, après calcination, par l'acide sulfurique à 10 pour 100 bouillant), ce qui permet d'effectuer la recherche sur 5^{g} de matière seulement.

MÉMOIRES LUS.

THERMODYNAMIQUE. — *Sur un détendeur de vapeur dont la pression réduite croît avec la dépense de la conduite*, par M. H. PARENTY.

La pression réduite d'un détendeur commandant une conduite de distribution de vapeur doit être modifiée suivant la dépense variable des divers ateliers et la sécurité du personnel exige que ce réglage soit automatique.

a. A la fin de ma Note du 22 janvier 1912 [1] je me réservais d'étendre à la vapeur les dispositions par lesquelles j'avais obtenu le *tirage* progressif d'une conduite de gaz, en la faisant précéder d'une soupape de régulation tout d'abord, puis d'un rhéomètre convergent divergent, comportant deux tuyères tronconiques opposées par la plus petite base. Les trois niveaux piézométriques : p_0 à l'entrée, p_2 à la sortie des cônes, p_1 dans la région périphérique du parallèle de surface minima ω qui sert de jauge à mon compteur de vapeur, se présentent dans l'ordre de grandeur

$$p_0 > p_2 > p_1.$$

b. L'industrie utilise le vide relatif p_1 du milieu *ambiant* d'un *col* où se lamine la vapeur, pour aspirer des fluides extérieurs, et j'ai récemment

(1) H. PARENTY, *Sur la régulation progressive des pressions, à l'entrée d'une conduite de distribution d'eau, de gaz ou de vapeur* (*Comptes rendus*, t. 154, 1912, p. 186).

établi [1] qu'en un jet *régularisé* [2] dont les masses animées des vitesses du son correspondant à leurs températures, enchevêtrent leurs trajectoires dans les souples limites d'une gaine ondulée en forme de gourde, la pression constante externe p_1, inférieure d'abord à la pression variable interne p_L, enfle les *nœuds* successifs de chaleur, vitesse sonore et densité, et les transforme, vers l'aval, en *ventres* ovoïdes froids, stagnants et raréfiés, où p'_L s'abaisse à son tour au-dessous de p_1; ce qui engendre une onde *stationnaire* dont l'énergie répond à la détente de p_L à p_1 et dont on peut déterminer la longueur λ et la période θ. Le rythme de cette *pulsation* provient de ce qu'en raison de la limitation des vitesses, les forces p_1 et p_L ne s'équilibrent pas au même point que leurs énergies. Il ne saurait y avoir de position de repos. C'est la genèse d'une *agitation* cartésienne. La matière du jet *rejaillit* indéfiniment sur la pression p_1 de son milieu.

c. Mon artifice consiste, pour le gaz, à régler cette curieuse pression minima p_1 du rhéomètre biconique, en la faisant agir sur la soupape d'admission au premier cône, par l'entremise d'un piston équilibré, à joints hydrauliques. Tout mouvement de ce piston dû à une variation de p_1, modifie l'ouverture de la soupape, en telle sorte que p_1 demeure constant. Toute augmentation du débit fait dès lors croître p_0, et toute augmentation de p_0 fait croître le débit. Cette action réflexe établit à la longue un régime analogue au *tirage* d'une cheminée.

d. Pour appuyer ma théorie, je ne dispose plus du témoignage lumineux de 500 *becs galerie*, dont l'éclat individuel n'a jamais varié pendant les périodes d'allumage et d'extinction de l'ensemble, et pour ce qui tient à l'invisible vapeur, je dois me borner à ne pas être trop obscur en mes explications. Et tout d'abord, mon but n'est pas ici de régler une pression à l'entrée de la conduite, mais d'assurer une dépense dont la valeur dépend de p_0, p_1 et ω, ce qui nécessite un réglage et m'oblige à résumer les lois expérimentales du débit de la vapeur que je prétendais avoir établies en 1893 [3], mais qui, en raison peut-être de leur simplicité inattendue, furent alors frappées d'une suspicion capable d'arrêter le succès de mon œuvre.

---

[1] H. Parenty, *Genèse d'une agitation cartésienne dans un jet de vapeur dont la vitesse se limite à la vitesse du son* (*Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 667).

[2] H. Parenty, *Constitution du jet régularisé de vapeur* (*Comptes rendus*, t. 119, 1894, p. 183).

[3] H. Parenty, *Sur la loi générale et les formules de l'écoulement de la vapeur d'eau saturée* (*Comptes rendus*, t. 116, 1893, p. 1120).

e. Soient Π le débit en poids; R_1 le rapport de la dépression $p_0 - p_1$ à la pression amont p_0; ϖ_0 le poids du mètre cube; g l'accélération de la pesanteur; ω la section; m le coefficient de débit de l'orifice *noyé dans l'eau;* a un paramètre thermique $= 0,4758$ pour la vapeur, et fonction du rapport des coefficients C et c de chaleur spécifique (unités : sec., mètre, tonne) :

$$(1) \qquad \Pi_L = a\omega\sqrt{2mgp_0\varpi_0}, \qquad \text{(débit limite)},$$

$$(5) \qquad \Pi_1 = \Pi_L\sqrt{\frac{2m}{a}R_1\left(1 - \frac{m}{2a}R_1\right)} \qquad \text{(débit variable)}.$$

Pour chaque valeur de p_0 quand la contre-pression p_1 croît de 0 à $\left(1 - \frac{a}{m}\right)p_0$, le débit se régularise [1], et ne dépend que de p_0 dont il est sensiblement une fonction linéaire :

$$(4) \qquad \pi_L = 0,006296\, a\omega\sqrt{2mg}\,(1 + 1,1335\,p_0).$$

Quand p_1 croît ensuite jusqu'à p_0, le débit descend le contour d'un quadrant d'ellipse d'abscisse R_1 [1] qui se rapproche en ses derniers éléments de la parabole dont j'ai fait la formule réduite de mon compteur de vapeur [1], et qui, pour de faibles valeurs de $h = p_0 - p_1$, fournit le débit horaire

$$\pi_1 = 1,591\sqrt{h\varpi_0},$$

que le compteur indique, enregistre et totalise.

f. Je mentionne qu'après une marche de 30 ans, attestée par les diagrammes, cet appareil a été, en ma présence, *systématiquement* détruit par les Allemands qui en connaissaient l'inventeur et le propriétaire, car, en dehors de ma déclaration enregistrée et étiquetée par eux, ce modèle avait fait en Allemagne, en 1901, un séjour qui avait permis à leurs savants de le démarquer. Le représentant de l'Allemagne fit alors établir et me remit une photographie, en reçu de l'objet qu'il empruntait à l'Exposition de 1900, et voici le dernier cliché de l'épave.

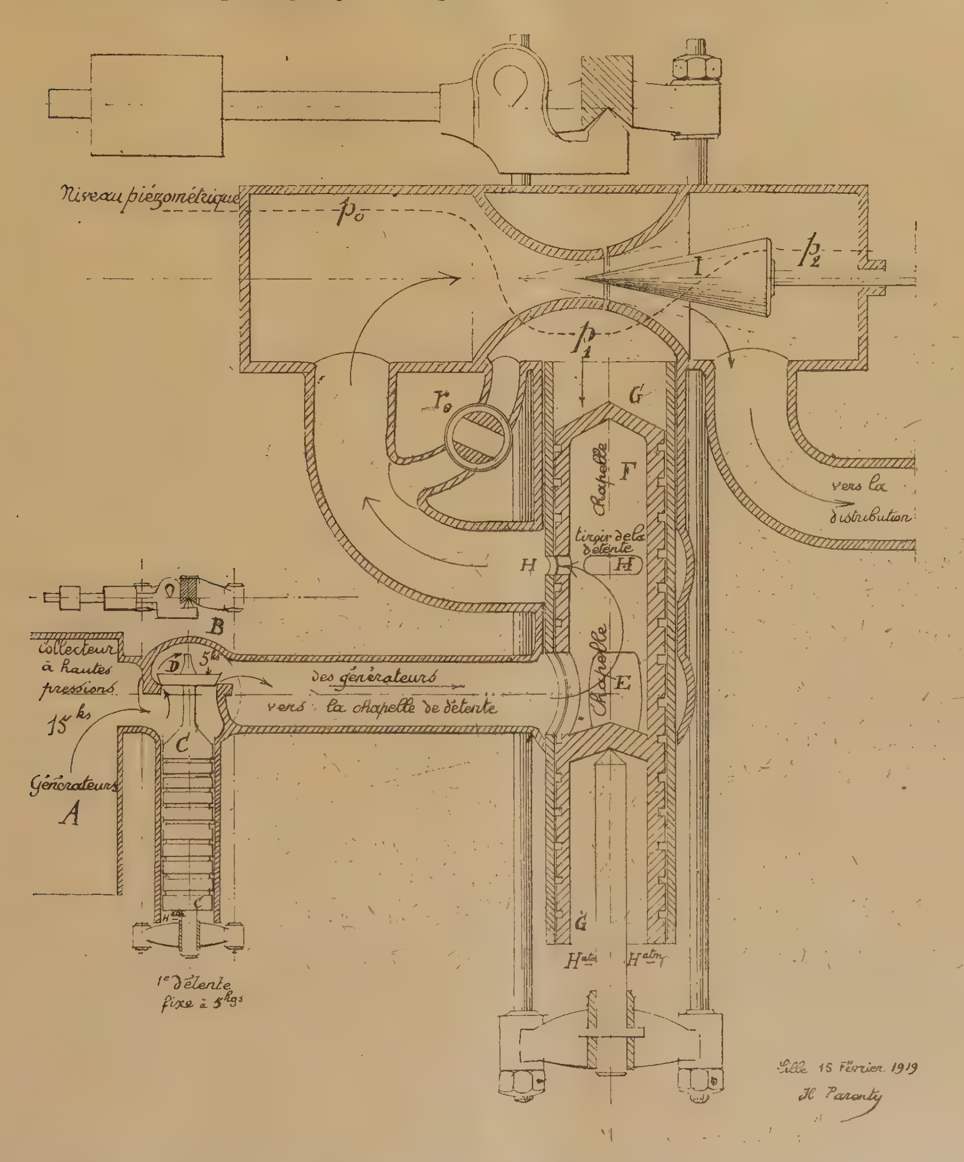
La constance de la plus faible pression p_1 du rhéomètre oblige les deux autres p_0 et p_2 à s'écarter d'elle, et, par conséquent, à augmenter avec la dépense. Il reste à obtenir, par un réglage, que cette dépense se proportionne constamment aux besoins :

---

[1] H. Parenty, *Sur la vérification du compteur de vapeur et son application à la mesure de la sursaturation et de la surchauffe* (*Comptes rendus*, t. 116, 1893, p. 867). — *Sur un compteur de vapeur* (*Comptes rendus*, t. 154, 1912, p. 25).

1° Je dispose de p_1;

2° Pour réduire p_0 et p_2, j'ai imaginé d'introduire dans la chambre péri-



phérique un courant de vapeur réglé par le robinet *modérateur* r_0 et emprunté à l'amont du rhéomètre, à la pression p_0 par conséquent. Cet apport

tend à augmenter p_1, qui, pour revenir à sa valeur constante, refoule le piston G, resserre le tiroir de laminage H, et enfin réduit p_0, p_2 et la dépense;

3° Le cône obturateur I permet de modifier ω.

Par ces trois moyens, il conviendra notamment de s'écarter des conditions du débit limite [formule (1)] sur lequel la valeur de $p_1 < \left(1 - \frac{a}{m}\right) p_0$ n'exerce plus d'influence. En trois points à mon choix, la consommation *prévue* correspond à la dépense du rhéomètre, qu'il convient de relier au compteur de vapeur de l'usine, s'il en existe un.

h. On peut réduire les très hautes tensions de certains générateurs A, à une pression de sécurité plus basse, dans un premier détendeur B, comportant un piston vertical C, suspendu à un fléau de balance et soumis de bas en haut à la pression atmosphérique, de haut en bas à la pression fixe qui agit sur la face supérieure de la soupape D. L'effluent pénètre de là, par de larges fenêtres latérales E, dans la chapelle F, ménagée à l'intérieur d'un second piston cylindrique vertical G, également suspendu au fléau d'une balance et soumis, sur ses faces horizontales étanches, de haut en bas, à la pression minima p_1 du rhéomètre, de bas en haut, à la pression atmosphérique. Au sortir de la chapelle, où les pressions s'équilibrent, la vapeur se lamine dans un tiroir circulaire H, remplaçant la soupape D du précédent appareil B. Elle se dirige vers l'entrée du rhéomètre, franchit les orifices, enfin entre dans la conduite. Toute variation de p_1 a pour effet de mettre en mouvement le piston équilibré G, sur lequel s'exerce son action, de modifier l'ouverture du tiroir H de laminage, enfin de ramener p_1 à sa valeur constante. A l'aval du détendeur il sera bon, pour éviter que le courant de vapeur ne favorise certaines dérivations *gourmandes* de la conduite au détriment de l'ensemble, de disposer en tête de chaque branchement important une vanne de réglage ou un détendeur.

La détente de p_0 à p_1, compensant les résistances de la distribution, évoque les moyens d'ouvrir un même fil à des télégrammes de sens contraire.

ÉLECTIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à l'élection d'un Associé étranger, en remplacement de M. *A. von Baeyer*, dont l'élection a été annulée par décision de l'Académie, en date du 15 mars 1915.

Au premier tour de scrutin, le nombre de votants étant 39,

M. George Ellery Hale obtient	. . . . . .	36 suffrages
M. Albert Michelson »	. . . . . .	2 »
M. Giacomo Ciamician »	. . . . . .	1 suffrage

M. **George Ellery Hale**, ayant réuni la majorité absolue des suffrages, est proclamé élu.

Son élection sera soumise à l'approbation de M. le Président de la République.

CORRESPONDANCE.

M. **Jules-Louis Breton** prie l'Académie de vouloir bien le compter au nombre des candidats à la place vacante dans la Division des Académiciens libres, par le décès de M. *Landouzy*.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'intégration, par quadratures, de l'équation* $\frac{d^2y}{dx^2} = F(x, y)$. Note de M. **Jules Drach**.

1. Le *groupe de rationalité* de l'équation aux dérivées partielles

$$(F) \qquad X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} F(x, y) = 0,$$

où $F(x, y)$ est *arbitraire* en x, y, est, dans le *domaine de rationalité* qui

contient y' et F, défini par l'équation

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, y')} = 1,$$

où φ et ψ sont deux solutions fondamentales de (F). Il est aisé d'en indiquer les divers cas de réduction. Parmi ces derniers, les plus immédiats correspondent à l'existence d'une *intégrale* de (F), *rationnelle* en y', $\varphi(y') = \varphi$; l'autre intégrale ψ, s'obtenant alors, d'après une remarque de Jacobi, par la quadrature $\psi = \int \frac{dy - y'\,dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial y'}}$; nous allons montrer, *à titre d'exemple*, comment on peut, méthodiquement, former tous ces cas, et définir la fonction $F(x, y)$ correspondante.

2. Supposons d'abord $\varphi = a_0 y'^n + \frac{n}{1} a_1 y'^{n-1} + \ldots$; ce polynome en y' devra vérifier identiquement la condition

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'} F = 0.$$

Il en résulte entre les $a_0, a_1, \ldots$ des relations dont les deux premières sont

$$\frac{\partial a_0}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial a_0}{\partial x} + n \frac{\partial a_1}{\partial y} = 0,$$

et dont l'ensemble peut se remplacer *par une équation aux dérivées partielles d'ordre* n, à une inconnue λ et aux variables x, y, les a_i s'exprimant sous forme entière avec λ et ses dérivées. C'est cette équation (E_n) que nous allons intégrer.

Les transformations $Y = \alpha y + \beta$, $X = \gamma$, où α, β, γ sont des fonctions de x, choisies de manière à conserver la *forme* de (F), permettent de prendre $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Les autres relations entre les a_i peuvent se remplacer par

$$\text{(G)} \qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} + \omega_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial y} = 0,$$

où ω_i est l'une des racines de $\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0$, et où l'on a $\varphi_i = \varphi(\omega_i)$. Ces relations expriment que l'équation différentielle $\varphi = \varphi(y')$ a des *solutions singulières*, données par $dy - \omega_i\,dx = 0$, dont les intégrales sont $\varphi_i = \text{const.}$ A un autre point de vue, les φ_i sont les *variables caractéristiques* de (E_n),

au sens d'Ampère; la solution générale du système (G) dépend de $(n-1)$ fonctions arbitraires d'un argument, qui est l'une des variables φ_i.

3. Décomposons en fractions simples l'expression de $d\psi$, nous aurons, en introduisant les variables $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$,

$$(A) \qquad d\psi = \frac{dy - y'\,dx}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}} = A_1 \frac{d\varphi_1}{y' - \omega_1} + \ldots + A_{n-1} \frac{d\varphi_{n-1}}{y' - \omega_{n-1}},$$

où les A_i s'expriment simplement avec les ω_i et les $\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}$.

Si l'on pose

$$\varphi = (y' - \mu_1) \ldots (y' - \mu_n)$$

on a, pour tout indice j,

$$d\psi_j = \frac{dy - \mu_j\,dx}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)_{y'=\mu_j}} = A_1 \frac{d\varphi_1}{\mu_j - \omega_1} + \ldots + A_{n-1} \frac{d\varphi_{n-1}}{\mu_j - \omega_{n-1}}.$$

On peut déterminer les A_i en $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, de manière que les seconds membres soient, quel que soit j, des différentielles exactes. Cela revient à dire qu'on peut prendre $\frac{\partial\varphi_i}{\partial y} = B_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ et former pour les B_i un système compatible.

Si l'on considère les μ_i comme des coordonnées *cartésiennes* données par

$$\Phi = \mu_1 + \ldots + \mu_n,$$
$$\varphi_i = (\omega_i - \mu_1) \ldots (\omega_i - \mu_n),$$

où les ω sont déterminés par

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \frac{1}{(\omega - \mu_1)} + \frac{1}{(\omega - \mu_2)} + \ldots + \frac{1}{(\omega - \mu_n)} = 0,$$

les surfaces $\Phi = \text{const.}$, $\varphi_i = \text{const.}$ sont deux à deux *orthogonales*,

$$d\mu_1^2 + \ldots + d\mu_n^2 = H_1^2\,d\varphi_1^2 + \ldots + H_{n-1}^2\,d\varphi_{n-1}^2 + \frac{1}{n}\,d\Phi^2,$$

et l'on trouve pour les dérivées de $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les expressions

$$\frac{\partial\mu_k}{\partial\varphi_i} = H_i^2\,\varphi_i \frac{1}{\mu_k - \omega_i}, \qquad \frac{\partial\mu_k}{\partial\Phi} = \frac{1}{n}.$$

Il suffit de faire $\Phi = 0$, pour obtenir un système de déterminations des A_i. En posant $\mu'_i = \frac{1}{n}\Phi + \Psi_i$, on voit que les μ'_i forment *un système complètement orthogonal de l'espace à n dimensions, ayant même représentation sphérique que celui formé par les* μ_i; le système général obtenu par les méthodes de Darboux [1] qui exigent l'intégration d'un système de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations du second ordre de la forme de Laplace, *à une inconnue*, donnera l'expression générale des A_i. En remarquant que les équations qui déterminent ces A_i ne dépendent pas de l'indice j de μ_j, ou que (A) est une identité en y', on en peut conclure aussi que les A_i sont tels que les équations

$$\begin{aligned}
A_1\omega_1^k\, d\varphi_1 + \ldots + A_{n-1}\omega_{n-1}^k\, d\varphi_{n-1} &= 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-4),\\
A_1\omega_1^{n-3}\, d\varphi_1 + \ldots + A_{n-1}\omega_{n-1}^{n-3}\, d\varphi_{n-1} &= -dx,\\
A_1\omega_1^{n-2}\, d\varphi_1 + \ldots + A_{n-1}\omega_{n-1}^{n-2}\, d\varphi_{n-1} &= dy
\end{aligned}$$

sont complètement intégrables.

Les ω_i ne dépendent que des différences des φ_i; on peut donc ajouter une constante u à $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, ce qui modifie les μ_k et les H_i et prendre, pour expression de A_i, l'intégrale définie

$$\int_{u_1}^{u_2} (\varphi_i + u)\, H_i^2(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, u)\,\theta(u)\,du,$$

où u_1 et u_2 sont deux constantes quelconques et $\theta(u)$ une fonction arbitraire. De cette expression des A_i, où figure une fonction arbitraire, on déduit, comme pour l'équation d'Euler et de Poisson (qui se présente pour $n = 3$), l'intégrale générale du système d'équations de Laplace en question. Enfin, les expressions générales des A_i peuvent aussi s'obtenir, sous forme d'intégrales définies, *par inversion des intégrales définies qui déterminent les périodes de l'intégrale* ψ, *comme fonctions de* φ.

4. L'étude du cas où φ est rationnel en y' n'exige que des modifications de détail. La même méthode permet aussi de former effectivement tous les cas où l'équation des lignes géodésiques d'une surface admet une intégrale première rationnelle par rapport à la dérivée première.

---

[1] G. Darboux, *Systèmes orthogonaux et coordonnées curvilignes*, Livre II, Chap. I.

D'une manière générale, tous les problèmes que l'on rencontre dans la détermination effective des équations différentielles

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

rationnelles par rapport à certains des éléments $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$, ..., *que l'on peut intégrer complètement par quadratures*, peuvent se résoudre complètement *à l'aide d'intégrales définies* prises dans le champ complexe. Enfin, la détermination effective des *types* de ces équations, *ayant un groupe de rationalité donné*, peut aussi se faire *explicitement*, si l'on *explicite* les transformations de ce groupe, que subissent leurs intégrales pour des variétés fermées quelconques parcourues par les variables.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques.* Note de M. **P. Fatou.**

Dans une Note récente [1], M. Denjoy a indiqué une propriété des fonctions de variable complexe qui consiste en ceci qu'une fonction analytique holomorphe et bornée d'un côté d'une ligne singulière L prend en chaque point de L, sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle, une valeur limite bien déterminée, suivant les chemins qui font un angle aigu avec la normale à L. Cette propriété n'est pas nouvelle, car je l'ai énoncée il y a environ quatorze ans [2] et démontrée dans ma Thèse [3]. Elle a servi de base aux intéressantes recherches de M. Carathéodory sur la représentation conforme [4]. Je l'ai d'ailleurs étendue [5] au cas où la fonction n'est pas bornée, mais ne prend pas les valeurs appartenant à un continu quelconque.

Il est vrai que je n'ai considéré que le cas où L est une ligne analytique; M. Denjoy considère le cas le plus général où L est une ligne rectifiable, ce

---

(1) *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 387.

(2) *Sur l'intégrale de Poisson et les lignes singulières des fonctions analytiques* (*Comptes rendus*, t. 140, 1905, p. 359).

(3) *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta mathematica*, t. 30, 1906, p. 335 et suiv).

(4) *Math. Annalen*, t. 72, 1912, p. 107-144.

(5) *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (*Bull. Soc. math. France*, 1913).

qui constitue un progrès notable [1]; mais le principe de sa démonstration ne paraît pas très différent de celui de mes propres recherches. J'ajoute que les profondes découvertes de M. Lebesgue sur l'existence des dérivées des fonctions à variation bornée, qui sont la clef de ces propriétés des fonctions analytiques, avaient déjà été appliquées par lui à des problèmes assez voisins concernant la sommation des séries de Fourier. C'est donc à lui que revient le principal mérite de la découverte de ces théorèmes, les seuls généraux que l'on possède, sur la manière dont se comporte une fonction analytique uniforme au voisinage d'une ligne singulière.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Une propriété générale des fonctions entières liée au théorème de M. Picard.* Note de M. GASTON JULIA.

On sait quels beaux résultats Hermite a obtenus par l'introduction des variables continues auxiliaires dans la théorie des nombres. Je vais montrer ici comment l'introduction d'une variable continue auxiliaire permet d'obtenir sur l'allure d'une fonction uniforme autour d'un point singulier isolé, des résultats un peu plus précis que ceux actuellement connus. L'exposition qui suit est relative aux fonctions entières les plus générales, mais elle s'applique mot pour mot à toute fonction méromorphe ayant une valeur exceptionnelle ou, ce qui revient au même, à toute fonction uniforme ayant un point singulier essentiel isolé (une telle fonction admettant l'infini pour valeur exceptionnelle).

$\varphi(z)$ étant la fonction entière envisagée et C une courbe continue arbitraire décrite par le point $T=\sigma(t)$ [2] quand la variable réelle t varie de o à $+\infty[\sigma(0)=0,\ \sigma(1)=1,\ \sigma(\infty)=\infty]$ et joignant l'origine à l'infini en passant par le point $T=1$, on considère la fonction entière $\varphi[z\sigma(t)]$ dépendant du paramètre continu t. z étant fixe et t variant, $z\sigma(t)$ décrit la

(1) Il convient d'observer que les théorèmes de M. Painlevé sur la représentation conforme (*Comptes rendus*, t. 112, 1891, p. 653) donnent immédiatement l'extension de mon théorème au cas d'une ligne L à tangente continue; l'énoncé obtenu est encore un peu moins général que celui de M. Denjoy. En appliquant les résultats obtenus par M. Carathéodory dans le Mémoire cité, on a une propriété analogue, naturellement moins précise, relative au cas où L est une ligne de Jordan sans points doubles.

(2) $\sigma(t)=\sigma_1(t)+i\sigma_2(t)$. σ_1 et σ_2 étant deux fonctions réelles continues de la variable réelle t dont l'une au moins devient infinie avec t.

courbe zC joignant z à l'infini. Si maintenant z décrit une couronne Γ arbitrairement mince comprise entre deux cercles quelconques de centre O (¹), on est sûr que tous les points du plan extérieurs au plus grand de ces cercles seront balayés par le point $z\sigma(t)$, quand z décrira Γ et t variera de 1 à $+\infty$.

Considérons la famille des fonctions $\varphi_t(z) = \varphi[z\sigma(t)]$, $[1 \leqq t \leqq \infty]$. A chaque valeur de t correspond ainsi une fonction entière $\varphi_t(z)$. Les valeurs que $\varphi_t(z)$ prend dans Γ sont celles que $\varphi(z)$ elle-même prend dans la couronne $\sigma(t).\Gamma$. On en conclut que, quelle que soit Γ, il est impossible que la famille des $\varphi_t(z)$ soit normale dans tout Γ, c'est-à-dire soit telle que, de toute suite infinie $\varphi_{t_1}, \varphi_{t_2}, \ldots, \varphi_{t_n}, \ldots$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \to \infty$, on puisse extraire une suite tendant vers une limite analytique dans Γ. On reconnaît, en effet, que, t_n tendant vers l'infini, toute fonction limite d'une suite φ_{t_n} ne peut différer d'une constante infinie, sans quoi $\varphi(z)$ serait bornée autour du point à l'infini. Il résulte immédiatement de là que si la famille $\varphi_t(z)$ était normale dans Γ, toute fonction limite (pour $t = \infty$) étant infinie, on devrait, sous peine de contradiction, admettre que, dans Γ, $|\varphi_t(z)| > M$ quelque grand que soit M, lorsque $t > t_0$, t_0 étant choisi assez grand. Mais cela équivaudrait à dire qu'en dehors d'un cercle de rayon assez grand, on a $|\varphi(z)| > M$ et cela aussi est incompatible avec l'hypothèse d'une transcendante entière $\varphi(z)$.

La famille $\varphi_t(z)$ n'est point normale dans tout Γ, il y a donc dans Γ un point au moins z_0, autour duquel cette famille n'est pas normale.

Envisageons maintenant la courbe z_0C et entourons z_0 d'une aire circulaire arbitrairement petite ω de centre z_0; lorsque t varie de 1 à $+\infty$, $z_0\sigma(t)$ décrit la courbe z_0C et l'aire $\sigma(t).\omega$, qui est une aire circulaire de centre $z_0\sigma(t)$, semblable à ω, dans le rapport $|\sigma(t)|$, rapport qui égale le *rapport des modules des centres* $z_0\sigma(t)$ *et* z_0, va balayer une bande Δ aboutissant au point à l'infini, contenant à son intérieur la courbe z_0C. L'épaisseur relative de cette bande Δ, c'est-à-dire le rapport entre le diamètre du cercle qui la balaie et le module du centre de ce cercle, reste constante; on peut la supposer d'ailleurs arbitrairement petite. Il est clair que les valeurs prises par $\varphi(z)$ dans la bande Δ, sont identiques aux valeurs prises par les fonctions holomorphes $\varphi_t(z)$ $(1 \leqq t \leqq \infty)$ dans l'aire arbitrairement petite ω.

(¹) On peut évidemment prendre pour Γ une couronne limitée par deux *courbes quelconques* entourant chacune l'origine.

Or, la famille des fonctions $\varphi_t(z)$ n'étant pas normale dans ω, toute valeur finie, sauf une valeur exceptionnelle [1] au plus, sera prise dans ω par une fonction de la famille. On en conclut que dans la bande Δ, dont l'épaisseur relative est arbitrairement petite, la fonction $\varphi(z)$ prend effectivement toutes les valeurs finies, sauf peut-être une valeur exceptionnelle.

C'est, *avec une précision nouvelle*, le théorème de M. Picard. Non seulement, autour du point singulier isolé à l'infini, la fonction φ prend toutes les valeurs finies sauf peut-être la valeur exceptionnelle, mais on peut encore affirmer qu'elle les prend toutes dans une certaine bande Δ d'épaisseur relative arbitrairement petite aboutissant au point à l'infini, et dont la forme a autant d'arbitraire que la courbe C elle-même, sur laquelle on n'a supposé en dehors de la continuité qu'une seule chose : c'est qu'elle allait à l'infini pour $t=\infty$. Si C est une droite passant par l'origine, la bande Δ sera limitée par un arc du cercle ω de centre z_0 et les deux tangentes à ω, issues de l'origine : on peut lui substituer un angle arbitrairement petit de sommet O [2] comprenant z_0 à son intérieur et affirmer que dans cet angle φ prend toute valeur finie sauf peut-être une valeur. Par exemple si $\varphi=e^z$, dans un angle arbitrairement petit de sommet O et contenant l'axe imaginaire, e^z prend toute valeur finie non nulle, alors que, sur cet axe imaginaire, $|e^z|$ reste égal à 1.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'échange du paramètre et de l'argument. Analogies avec la réduction des intégrales doubles de seconde espèce.* Note de M. A. **Buhl.**

Soit la transformation

$$X=\frac{\Phi(x, y)}{x-y}, \qquad Y=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\Phi(y, y)}-\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\Phi(x, x)}.$$

Appliquée à l'identité

$$\int X\,dY=\int\int dX\,dY, \tag{1}$$

(1) Si $\varphi(z)$ admet une valeur exceptionnelle a dans tout le plan, la valeur exceptionnelle qu'elle peut ne pas prendre dans Δ est précisément a.

(2) Ou tout angle d'axe Oz_0 dont le sommet soit sur Oz_0 aussi voisin de z_0 qu'on voudra.

elle transforme le premier nombre en une intégrale de ligne dont on aperçoit immédiatement la forme, et le second en une intégrale double que contient $\Delta\, dx\, dy$, si

$$\Delta = \frac{(x-y)[\Phi'_x \Phi(x,x) + \Phi'_y \Phi(y,y)] + \Phi[\Phi(y,y) - \Phi(x,x)]}{(x-y)^2 \Phi(x,x)\Phi(y,y)}.$$

Si $\Phi^2 = P(x)P(y)$, P étant un polynome, l'identité ainsi transformée de (1) est celle déjà rappelée dans ma Note du 9 décembre 1918 et qui joue un si grand rôle dans les travaux de Jacobi et de Weierstrass; elle était d'ailleurs connue d'Abel et peut-être de Legendre.

La propriété capitale du Δ précédent est que le numérateur est *tout naturellement* divisible par $(x-y)^2$.

Reprenons maintenant la transformation initiale avec

$$\Phi(x,y) = \frac{xy\Psi(x,y)}{x-\alpha y},$$

en désignant par α une constante d'abord quelconque. Alors Δ devient le produit de $(1-\alpha)$ par

$$\frac{(x-y)(x-\alpha y)[x\Psi'_x \Psi(x,x) + y\Psi'_y \Psi(y,y)] + (\alpha y^2 - x^2)\Psi[\Psi(x,x) - \Psi(y,y)]}{(x-y)^2 (x-\alpha y)^2 \Psi(x,x)\Psi(y,y)}.$$

Le nouveau numérateur est toujours divisible, *tout naturellement*, par $(x-y)^2$, *mais il n'en est pas de même quant à la division par* $(x-\alpha y)^2$; celle-ci n'a lieu qu'aux deux conditions

$$(2) \qquad \Psi(\alpha y, \alpha y) = \Psi(y,y), \qquad \Psi(\alpha y, y) = C\,\Psi(y,y),$$

où C est une constante arbitraire. On obtient ces conditions en écrivant que le numérateur à étudier s'annule pour $x = \alpha y$ et qu'il en est de même de sa dérivée partielle en x.

Il est aisé de trouver des solutions particulières du système (2) et même des solutions telles que le nouveau Δ soit une somme de produits dont chaque facteur ne contient que x ou y, d'où une généralisation considérable du théorème d'échange déjà invoqué; mais de telles généralisations ne sont que des cas très particuliers des algorithmes étudiés par M. Émile Picard, quant à la classification des intégrales doubles de seconde espèce.

Si les conditions (2) *sont satisfaites*, l'intégrale double qui contient le nouveau Δ ne contiendra évidemment point les lignes d'infini $x=y$ et $x=\alpha y$

alors que, d'après (1), elle sera cependant égale à une intégrale de ligne

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

où, en général, P et Q contiendront ces lignes. C'est en ceci que consiste la plus grande des difficultés du problème de la réduction au nombre minimum des intégrales doubles de seconde espèce.

Supposons donc que notre intégrale double soit attachée à une surface algébrique; la réduction des intégrales doubles de seconde espèce attachées à cette surface s'effectuera de manières différentes, suivant que les conditions (2) seront ou ne seront pas réalisées.

S'il arrive, de plus, que α figure dans Ψ et que les conditions (2) ne soient satisfaites que pour une certaine forme arithmétique de α, on aboutit à une explication déjà très générale d'un fait capital mis en lumière par M. Émile Picard : *les mêmes surfaces, dépendant de* Ψ *alors que* Ψ *dépend de* α, *suivant la nature arithmétique de cette constante* α, *admettent des réductions totalement différentes quant au nombre de leurs intégrales doubles de seconde espèce.*

Comme exemple, on peut prendre la surface (P et A étant des polynomes)

$$z^\lambda = \Psi^\lambda = P^\mu(x^p)\,P^\nu(y^p) + (x-y)(x-\alpha y)\,A(x, y),$$

où μ, ν, $\frac{\mu+\nu}{\lambda}$ sont entiers *et où* α *est racine* $p^{\text{ième}}$ *de l'unité*. Si cette dernière condition, relative à α, n'était pas satisfaite, la surface n'en existerait pas moins, mais l'intégrale double qui lui a été attachée ne perdrait plus les lignes d'infini $x = y$, $x = \alpha y$.

M. Émile Picard a donné des exemples d'une autre nature, fondés sur la multiplication complexe.

J'entrevois que des considérations arithmétiques très diverses, différant beaucoup et de la multiplication complexe et de la théorie des racines de l'unité, pourraient conduire à des conclusions semblables aux précédentes. Ce serait faire un pas capital que de donner une théorie générale des solutions du système (2).

Enfin, ce qui peut sembler prématuré, mais ce qui, cependant, découle naturellement de la méthode indiquée dans ma Note du 9 décembre, c'est que les résultats précédents s'étendent aisément aux intégrales d'ordre de multiplicité quelconque et, par suite, aux hypersurfaces algébriques.

OPTIQUE. — *Les théories émissives et le principe de Doppler-Fizeau.* Note de M. **Félix Michaux**, présentée par M. Lippmann.

Pour expliquer les phénomènes de l'optique des corps en mouvement, on peut avoir recours soit au concept d'un milieu de propagation : éther, en repos absolu (théorie de Lorentz-Einstein), soit à l'image de l'émission (théories de Ritz, de J.-J. Thomson et Stewart, de Tolman).

La théorie de Lorentz-Einstein nécessite, comme on sait, un changement des notions de temps, d'espace, de masse, de force et de température.

Les théories émissives ont l'avantage de n'entraîner aucune modification de ce genre. Elles rendent compte, tout au moins dans une certaine mesure, de l'effet Doppler. Toutes, en effet, s'accordent à considérer la vitesse de la lumière émise par une source en mouvement comme étant la résultante géométrique de la vitesse de la source et de la vitesse de la lumière issue d'une source immobile. On démontre que, dans ces conditions, la longueur d'onde n'est pas changée et qu'un observateur qui mesure la période de réception des ondes constate une variation de la période obéissant à la loi de Doppler-Fizeau.

Michelson, Fabry et Buisson, et, plus récemment, Majorana [1], ont pensé qu'en recevant la lumière émise par une source en mouvement dans un interféromètre on pourrait mesurer la longueur d'onde indépendamment de la vitesse de propagation, et, par suite, décider entre la théorie de Lorentz et les théories émissives.

Le résultat de l'expérience est en faveur de la théorie de Lorentz. Je me propose de montrer que, s'il met effectivement en échec les théories de Thomson-Stewart et de Tolman, il est néanmoins conforme à la théorie de Ritz.

Nous nous limiterons au cas où l'interféromètre est constitué simplement par un miroir plan recevant normalement la lumière et devant lequel se forment des ondes stationnaires. Il n'y a donc ni lames de verre ni lentilles interposées sur le trajet des rayons lumineux.

Si la source se déplace avec une vitesse v dans le sens de la propagation du faisceau émis, la vitesse du rayonnement, d'après les théories émissives, sera $V + v$ ($V =$ vitesse de la lumière issue d'une source immobile). Dési-

---

[1] *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 71.

gnons par u la vitesse du miroir comptée progressivement quand le miroir fuit devant le rayonnement. Soit

$$y_0 = a \sin \frac{2\pi t}{T_m}$$

le mouvement incident dans le plan du miroir. A une distance x du miroir, le mouvement y dû à la lumière incidente sera identique au mouvement dans le plan du miroir au temps $t + \frac{x}{V + v - u}$. On aura donc

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T_m}\left(t + \frac{x}{V + v - u}\right).$$

La réflexion ayant lieu avec changement de signe, le miroir fonctionne comme une source dont le mouvement est

$$y'_0 = a \sin\left(\frac{2\pi t}{T_m} - \pi\right) = -a \sin \frac{2\pi t}{T_m}.$$

La lumière réfléchie se propage avec une vitesse absolue qu'on peut désigner par $V + v'$, c'est-à-dire une vitesse relative $V + v' + u$ par rapport au miroir. A la distance x du miroir, le mouvement réfléchi sera donc

$$y' = -a \sin \frac{2\pi}{T_m}\left(t - \frac{x}{V + v' + u}\right).$$

Cela donne pour le mouvement résultant

$$Y = y + y' = 2a \sin \frac{\pi x}{T_m}\left(\frac{1}{V + v - u} + \frac{1}{V + v' + u}\right)$$
$$\times \cos \frac{2\pi}{T_m}\left[t + \frac{x}{2}\left(\frac{1}{V + v - u} - \frac{1}{V + v' + u}\right)\right].$$

On en déduit, pour la distance entre deux nœuds, ou demi-longueur d'onde apparente,

$$\frac{\lambda_m}{2} = \frac{T_m}{\frac{1}{V + v - u} + \frac{1}{V + v' + u}}.$$

La période T_m de réception des ondes sur le miroir se calcule aisément en fonction de la période T de la source : c'est un problème analogue à celui des courriers. On trouve

$$T_m = \frac{TV}{V + v - u} = \frac{\lambda}{V + v - u}.$$

En portant dans l'équation donnant λ_m et en tenant compte de ce que V est très grand par rapport à v et à v', on obtient l'expression approchée

$$\lambda_m = \lambda\left(1 + \frac{v'}{2V} - \frac{v}{2V} + \frac{u}{V}\right).$$

D'après la formule de Doppler on doit avoir

$$\lambda_{m'} = \lambda\left(1 + \frac{u}{V} - \frac{v}{V}\right).$$

Les deux formules coïncident si $v' = -v$.

Or, dans la théorie de Tolman, un miroir se comporte comme une nouvelle source. Cela donne, avec nos notations, $v' = -u$.

Dans la théorie de Thomson-Stewart, tout se passe comme si le miroir n'existait pas et qu'on ait affaire à une source qui se déplace comme l'image donnée par le miroir. On a donc $v' = v - 2u$.

Dans la théorie de Ritz, la lumière, après réflexion, se propage comme si elle provenait d'un centre qui se déplace avec la vitesse de la source. Alors $v' = -v$. C'est bien le résultat obtenu tout à l'heure.

En conséquence, le fait que la formule de Doppler se vérifie quand on mesure la longueur d'onde au moyen d'un interféromètre infirme les théories de Tolman et de Thomson-Stewart, mais se trouve être conforme à la fois à la théorie de Lorentz et à celle de Ritz.

Lorsque la lumière, issue d'une source fixe par rapport au sol, se réfléchit sur un miroir en mouvement, elle conserve, d'après la théorie de Ritz, une vitesse constante V relativement au sol. Le mouvement du miroir produit un changement effectif de la longueur d'onde qui est le même dans la théorie de Ritz que dans celle de Lorentz. Il y a encore, dans ce cas, identité complète entre les résultats donnés par les deux théories.

PHYSIQUE. — *Propriétés physiques de la vapeur de pétrole.* Note [1] de M. **Jean Rey**, transmise par M. A. Blondel.

Les expériences que j'ai poursuivies pendant plusieurs années, sur la vapeur de pétrole (densité 0,800 à 0,810), pour déterminer le diagramme

---

[1] Séance du 3 mars 1919.

entropique de ce corps [1] (qui est, en réalité, un mélange d'hydrocarbures), m'ont permis également d'étudier les propriétés physiques de sa vapeur.

Caractéristique physique $f(p, v, T) = 0$. — De la courbe des tensions de vapeur, dont j'ai indiqué la loi dans une Note précédente, ainsi que de la valeur de la chaleur de vaporisation, on déduit, par la formule de Clapeyron, le volume spécifique v de la vapeur, en fonction du volume du liquide u, pour chaque température t centigrade. Ce volume se calcule d'abord à l'aide des expériences de Bartoli et Stracciati [2], qui donnent le coefficient de dilatation Δ pour chaque température centigrade t :

$$\Delta = 0,00085 + 0,0000012\,t.$$

D'où le volume du liquide en litres

$$U_t = 1,25[1 + t(0,00085 + 0,0000012\,t)],$$

la densité moyenne du pétrole étant de 0,800 à la température de 0° centigrade.

On en déduit, en fonction de la pression absolue p, les volumes spécifiques v de la vapeur de pétrole, en mètres cubes :

p	1^{kg}	3^{kg}	5^{kg}	10^{kg}	15^{kg}	25^{kg}	40^{kg}	60^{kg}
v	0,269	0,0849	0,0502	0,0256	0,0178	0,0115	0,00803	0,00624

A l'aide de ces résultats, on trouve qu'entre 3^{kg} et 25^{kg} de pression absolue, la fonction $f(p, v, T) = 0$, pour la vapeur de pétrole surchauffée, est sensiblement de la forme

$$p(v + a) = RT, \tag{1}$$

---

(1) *Sur le diagramme entropique du pétrole* (*Comptes rendus*, t. 166, 1918, p. 387). Cette Note, du 4 mars 1918, contient deux erreurs d'impression dans la formule des tensions de vapeurs.

Il faut lire :

$$T = 1,167\,T_0 + 0,641(T_0 - 373),$$

au lieu de

$$T = 1,167\,T_0 - 0,641(T_0 - 273).$$

(2) *Gazzetta chimica italiana*, année 1884, fasc. X, p. 549.

dans laquelle les deux constantes ont pour valeur

$$a = 0,024; \quad R = 5,09.$$

Divers expérimentateurs ont, d'ailleurs, démontré que cette forme [1] représente, avec une assez grande approximation, la constitution physique de la vapeur d'eau surchauffée.

Bertrand [2] a indiqué que cette forme s'applique également à un corps dont le travail interne de dilatation est nul et dont les deux chaleurs spécifiques sont fonction de la température seulement, leur différence

$$C_p - C_r = AR$$

étant constante.

Vitesse d'écoulement. — Ceci posé, en employant une méthode particulière dont le détail se trouvera dans un autre Recueil, j'ai pu établir que la vitesse d'écoulement V_c d'un pareil fluide sortant d'une tuyère à section conique convergente, est représentée, au débit limite, par l'expression suivante :

$$V_c = 4,43\sqrt{RT_s\frac{K}{K+1} - a(p_0 - p_c)},$$

dans laquelle T_s est la température de la vapeur surchauffée en amont, p_0 sa pression, p_c la pression à la section de sortie, K le rapport des chaleurs spécifiques.

Une fois connue la valeur K, on a, pour la vitesse et la pression de sortie, les formules suivantes :

$$V_c = 4,43\sqrt{2,5677\,T_s - 0,0024(p_0 - p_c)}, \qquad p_c = p_0\left(\frac{2}{K+1}\right)^{\frac{K}{\mu-1}} = p_0 \times 0,6026.$$

La chaleur spécifique sous pression constante s'obtient par la formule de Heen, en fonction de la chaleur spécifique et du coefficient de dilatation du liquide ainsi que de la chaleur de vaporisation. On trouve ainsi :

$$C_p = 0,2508 + 0,000616\,T + 0,1077 \times \overline{10}^{6} \times T^2.$$

---

[1] TUMLIRTZ, *Kœnig. Akademie der Wissenschaften in Wien*, t. 108, 1899. Essais de Batelli.

[2] *Thermodynamique*, p. 148.

Connaissant la différence des deux chaleurs spécifiques et la chaleur spécifique sous pression constante, il est facile d'en déduire la chaleur spécifique à volume constant,

$$C_p - C_v = \frac{5,09}{425} = 0,012 \qquad \text{d'où} \qquad K = \frac{C_p}{C_p - 0,012}$$

pour $p_0 = 10^{kg}$,

$$C_p = 0,6432, \qquad C_v = 0,6312, \qquad K = 1,019;$$

pour $p_0 = 25^{kg}$,

$$K = 1,017 \qquad \text{(la moyenne est sensiblement } K = 1,018\text{)}.$$

On trouve également, pour le volume spécifique à la section rétrécie

$$V_c = \frac{RT_s}{p_0}\left(\frac{K+1}{2}\right)^{\frac{1}{\mu-1}} - a = 8,37\frac{T_s}{p_0} - 0,0024.$$

J'ai comparé ces résultats du calcul avec ceux fournis par les expériences d'écoulement de la vapeur surchauffée de pétrole que j'ai effectuées sur des brûleurs-vaporisateurs. Parmi ces essais, 42 ont été retenus et la discussion en a réduit le nombre à 18.

Les ajutages d'écoulement étaient de 6 calibres différents, de $1^{mm},40$ de diamètre jusqu'à $3^{mm},80$. Les débits ont varié de $2^{kg},880$ à l'heure jusqu'à $41^{kg},500$ et les pressions, de $1^{kg},620$ absolu jusqu'à $19^{kg},700$.

Les températures absolues de la vapeur ont passé de 623° jusqu'à 813°.

La comparaison des résultats donne, pour la moyenne arithmétique des écarts, 2,4 pour 100, c'est-à-dire que le débit calculé est de 2,4 pour 100 plus élevé que le débit observé. Cet écart, qui paraît systématique, est dû probablement à la viscosité de la vapeur de pétrole, plus forte que celle de la vapeur d'eau.

Si l'on retranche cette erreur systématique de la valeur des écarts rangés par ordre de grandeur, les différences sont sensiblement d'accord avec la courbe des erreurs, l'écart moyen quadratique étant de 0,0553, et l'écart probable de 0,041, soit 9 pour 100 de différence d'avec le rapport théorique, 0,67, de ces deux nombres.

Étant données les difficultés de ces expériences dues à la variation de composition du pétrole employé et aux mélanges pratiqués par les distillateurs, on peut dire que l'accord entre la théorie et l'observation est satisfaisant; pour les besoins de la pratique, il est en tous cas suffisant.

Les formules précédentes permettent donc de calculer le débit de la

vapeur surchauffée de pétrole se détendant d'une enceinte dans une autre, sa constitution physique répondant à la formule $p(v + 0,0024) = 5,09\,T$.

Signalons particulièrement la faible valeur du rapport des chaleurs spécifiques. Les mesures de Capstick sur le méthane, l'éthane et le propane indiquent clairement qu'à mesure que la molécule se complique, la valeur de ce rapport diminue.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Étude spectrographique des cendres de plantes marines.* Note de M. **Eugène Cornec**, présentée par M. A. Haller.

On sait que les plantes marines concentrent l'iode contenu dans l'eau de la mer et que leurs cendres servent de matière première pour la préparation industrielle de ce métalloïde.

Ces végétaux vivent dans un milieu qui, recevant toutes les eaux du lessivage terrestre, doit renfermer, malgré les réactions de précipitation, un très grand nombre d'éléments au moins à l'état de traces. Le pouvoir sélectif de ces plantes n'est vraisemblablement pas limité à l'iode; on peut donc espérer retrouver dans leurs cendres un grand nombre d'éléments.

Des laminaires ont été lavées puis incinérées; les cendres obtenues (3^{kg} environ) lessivées par l'eau, puis par l'acide chlorhydrique. L'étude spectrographique a porté sur l'insoluble et sur les précipités correspondants aux différents groupes analytiques.

Le spectrographe est à prisme et à optique de quartz, la substance est placée dans une cavité forée dans le charbon positif de l'arc électrique; on photographie côte à côte le spectre de la substance, celui des charbons et le spectre du fer qui sert d'échelle (technique de G. Urbain) [1].

L'étude complète des spectrogrammes était limitée à la région ultraviolette comprise entre 2500 et 3500 U.A.

Sans être absolument générale, la méthode est sensible pour la plupart des métaux lourds, en particulier pour les métaux rares [2].

Nous avons reconnu dans les plantes marines la présence des éléments suivants :

---

(1) G. Urbain, *Introduction à l'étude de la Spectrochimie.*

(2) J. Bardet, *Thèse Paris*, 1914.

I.	II.	III.
Argent	Bismuth	Antimoine
Arsenic	Étain	Germanium
Cobalt	Gallium	Glucinium
Cuivre	Molybdène	Titane
Manganèse	Or	Tungstène
Nickel		Vanadium
Plomb		
Zinc		

L'or, le bismuth, le gallium et le germanium existent seulement à l'état de traces spectrographiques.

Les éléments du groupe I ont déjà été indiqués dans les végétaux marins : Ag, Pb, Cu par Malaguti, Durocher et Sarzeaud (¹); Co, Mn, Ni, Zn par Forchammer (²) (Ni n'est pas donné comme certain); As par Armand Gautier (³).

Les éléments du groupe II ont été signalés dans l'eau de la mer : Au par Sonstadt (⁴); Bi, Sn, Mo par Bardet (⁵); Ga par del Campo et Rodeja (⁶).

A notre connaissance, les éléments du groupe III n'ont été signalés ni dans les plantes marines, ni dans les eaux de la mer.

Notre étude ne nous a donné aucune indication de la présence des métaux de la famille du platine, ni de ceux du groupe des terres rares. L'absence des raies particulièrement sensibles du thallium et de l'indium est remarquable.

A titre de comparaison, rappelons que Demarçay (⁷) a reconnu par l'analyse spectrographique la présence de Mn, Mo, V, Cr, Zn dans les végétaux terrestres. (Une étude en cours montre que cette liste doit être complétée.)

---

(1) *Annales Chim. et Phys.*, t. 28, 1850, p. 129.
(2) *Philosop. Transact.*, t. 155, 1865, p. 203.
(3) *Comptes rendus*, t. 135, 1902, p. 833.
(4) *Proc. Roy. Soc.*, 1872.
(5) *Ann. Soc. Hydrologie*, t. 58, 1913, p. 355.
(6) *Ann. Soc. Esp. phys. et chim.*, t. 12, 1914, p. 78.
(7) *Comptes rendus*, t. 130, 1900, p. 91.

GÉOLOGIE. — *Le Col du Cotentin.* Note de M. A. **Bigot**, présentée par M. Pierre Termier.

Le Col du Cotentin est constitué par un faisceau d'assises paléozoïques, en partie décrites par M. Lecornu et par nous-même, qui s'échelonnent entre l'Algonkien et le Stéphanien, et dont le faible relief est en partie dû à la prédominance des formations schisteuses. On peut y distinguer les éléments suivants :

Au Sud, la *bande de Lessay* est formée par un large affleurement de formations cambriennes peu inclinées. Les schistes de la Feuillie et les arkoses de la bande de Lessay se moulent à leur bord sud-est contre une saillie de granite à amphibole métamorphisant l'Algonkien et les conglomérats de base du Cambrien qui reposent sur lui à la Feuillie. Au Nord-Est apparaissent des formations plus récentes; un second niveau de schistes cambriens, avec lits rouges, s'enfonce sous les grès ordoviciens du Mont Castre, fortement en relief sur les régions avoisinantes.

La bande de Lessay est limitée au Sud par une faille qui met en contact les arkoses et les schistes cambriens avec les schistes algonkiens. Une faille limite aussi au Nord la bande de Lessay, dont le Cambrien est bordé au Nord-Ouest par les schistes et quartzites siluro-dévoniens. Cette faille se continue au sud-ouest de Saint-Germain-sur-Ay dans les rochers littoraux; au sud de cette faille, des schistes cornés, très probablement cambriens, sont métamorphisés par le granite à amphibole qui forme les rochers en face du corps de garde de Saint-Germain. La faille, d'abord dirigée du Sud-Ouest au Nord-Est, s'infléchit pour contourner le Mont Castre, dont les divers termes ordoviciens s'arrêtent brusquement au Nord contre une bande de schistes et de calcaires dévoniens, autrefois exploités dans les landes du Plessis et de Saint-Jores.

Au centre, *l'axe de Saint-Sauveur* correspond à un large affleurement de schistes et quartzites siluro-diluviens, avec schistes à graptolithes et calcaires ampéliteux. La disposition générale est anticlinale, mais affectée d'ondulations qui expliquent la grande surface occupée par cette formation. Les plus importantes de ces ondulations font apparaître les grès de May dans les Monts d'Etanclin et de Doville, où ils sont entourés par des schistes à trinucléus qui séparent le grès de May des grès culminants; ceux-ci contiennent à Saint-Nicolas-de-Pierrepont des couches d'ampélites. Les

grès de May de Rauville-la-Place et des Monts de Taillepied et de Besneville jalonnent une seconde ondulation qui s'infléchit vers le Nord et se raccorde avec les grès de May du Valdecie, qui continuent l'anticlinal des Moitiers-d'Allonne.

Au Nord, *l'anticlinal ordovicien des Moitiers-d'Allonne* s'allonge de l'Est à l'Ouest. Ses bords nord et sud sont limités par des contacts anormaux avec le Dévonien. A l'Ouest, les schistes cambriens du cap Carteret s'avancent très loin au Sud, parallèlement à la bordure du Dévonien, jusqu'à l'entrée du havre de Porbail.

Dévonien. — La distribution du Coblencien est réglée par la disposition et l'allure des éléments précédents.

Une première bande s'étend entre le bord sud de l'anticlinal de Saint-Sauveur et le bord nord de la bande de Lessay; rétrécie entre le Mont Castre et les Monts de Doville et d'Étanclin, elle s'élargit à l'Ouest, où elle forme les rochers littoraux depuis l'entrée du havre de Portbail jusqu'au sémaphore de Saint-Germain-sur-Ay. Elle s'élargit aussi à l'Est vers Saint-Jores et Prétot, contourne l'extrémité de l'axe de Saint-Sauveur dans les bois de Limor jusqu'aux Moutiers-en-Bauptois, et se raccorde sans doute, souterrainement, avec la bande dévonienne de la forêt de Saint-Sauveur.

Une deuxième bande est limitée au Nord par le bord de l'anticlinal des Moitiers et par une digitation de l'axe de Saint-Sauveur. Elle forme un synclinal largement étalé, ouvert à l'Ouest et terminé brusquement sur la mer par ses couches les plus élevées, qui plongent vers les schistes cambriens des roches littorales. Entre Barneville et Carteret, ces couches dévoniennes, poussées contre le bord de l'anticlinal des Moitiers, sont redressées et renversées.

Malgré l'apparente simplicité de sa structure, la région du Col du Cotentin présente des accidents qui témoignent d'efforts énergiques de poussée.

Le synclinal dévonien est terminé à l'Ouest par un accident important, continuation de celui qui le limite au Nord contre l'anticlinal des Moitiers, mais qui prend l'allure d'une faille très oblique, au-dessus de laquelle le Cambrien est recouvert par le Dévonien. Celui-ci fait partie d'un lambeau qui a cheminé au-dessus de cette faille, poussé du Sud au Nord contre l'anticlinal des Moitiers, le long duquel ses assises se sont renversées.

L'accident qui limite la bande de Lessay, en particulier le contact des couches ordoviciennes du Mont-Castre avec les couches dévoniennes sur lesquelles elles ont été poussées, est de même nature. L'interprétation

s'étend aux autres accidents de la région et à ceux qui sont situés plus au Nord, dans la région dévonienne de Baubigny et de Surtainville et de son extension vers l'Est, vers Bricquebec et Valognes.

La région du Col du Cotentin, comme la Zone Bocaine, présente une structure imbriquée, avec prédominance de la suppression de la lèvre nord des plis, disposition qui est due à des poussées venant du Sud.

BOTANIQUE. — *L'*Urera Humblotii *H. Baillon et ses affinités.* Note de M. **Paul Guérin**, présentée par M. Guignard.

Le genre *Urera* Gaud., du groupe des Urticées-Urérées, ne comprend pas moins d'une quarantaine d'espèces des régions tropicales, dont une demi-douzaine pour Madagascar. L'une de ces dernières, décrite en 1885 par H. Baillon, sous le nom d'*U. Humblotii* (¹), a été retrouvée en 1912 par M. R. Viguier, dans la partie Est de cette île (forêt d'Analamazaotra, province d'Andovoranto), où elle est assez commune et désignée par les indigènes sous le nom de « Ampy ».

M. Viguier ayant mis aimablement ses échantillons à notre disposition, il nous a été permis, avec les spécimens de Humblot, conservés dans les collections du Muséum de Paris, de compléter la description de l'*U. Humblotii* H. Bn, d'en faire l'étude anatomique, et de préciser les affinités de cette espèce avec les autres *Urera*.

L'*U. Humblotii* H. Bn est un sous-arbrisseau de $0^m,75$ à 1^m de hauteur, horriblement urticant, en raison de la présence, sur ses divers organes, de nombreux poils transparents, très aigus, atteignant jusqu'à 2^{mm} de longueur, et dont la base renflée, parenchymateuse, est d'un vert jaunâtre. Très abondants sur les nervures foliaires, ces poils se rencontrent également épars sur l'épiderme supérieur du limbe.

Les feuilles, abondamment dentées, d'un vert sombre en dessus, de teinte cendré pâle en dessous, brièvement pétiolées ($1^{cm},5$-3^{cm}), atténuées à la base, brusquement acuminées au sommet en une longue pointe (2^{cm}-3^{cm}) pourvue aussi de dents sur les bords, peuvent atteindre jusqu'à 30^{cm} de longueur sur 5^{cm} de largeur. Les nervures, très saillantes sur la face inférieure du limbe qu'elles subdivisent en alvéoles assez

---

(¹) H. Baillon, *Liste des plantes de Madagascar* (*Bull. Soc. linnéenne de Paris*, t. 1, p. 479-480).

grandes, bien visibles dans la plante fraîche, se dessinent en creux sur la face supérieure.

De part et d'autre de la nervure médiane se détachent, plus ou moins horizontalement, une quinzaine (dans les plus grandes feuilles) de nervures secondaires principales qui viennent aboutir à une nervure marginale tout à fait caractéristique, de laquelle part, vers chaque dent, une fine nervure.

A la base des feuilles se trouvent les cymes de fleurs femelles (les seules que nous ayons observées, la plante étant vraisemblablement dioïque), de 4^{cm}-5^{cm} de longueur. Sur les courtes ramifications de l'axe principal, les fleurs, très serrées, sont sessiles, pourvues d'un calice à quatre lobes légèrement charnus. Les deux latéraux, beaucoup plus développés que les autres, atteignent presque le sommet de l'ovaire; le lobe inférieur est excessivement petit, à peine visible; le lobe supérieur est gibbeux. Le stigmate comprend un grand nombre de petits poils groupés en tête. L'akène, qui est comprimé et très étroitement marginé, mesure $1^{mm},4$ environ de long sur 1^{mm} de largeur.

L'*U. Humblotii* H. Bn, tel que nous venons de le décrire, offre, avec l'*U. longifolia* Wedd. (¹), autre espèce de Madagascar, les plus grandes analogies, et la structure anatomique de la feuille se montre, dans les deux espèces, absolument identique. Aussi, est-il étonnant que l'attention de Baillon n'ait pas été attirée par ce fait et que ce botaniste ait cru devoir, sans plus de commentaires, créer, pour l'*Urera* de Humblot, une espèce nouvelle qu'il décrit à la suite de l'*U. longifolia* Wedd. Nous ne sommes pas éloigné de croire, en ce qui nous concerne, que l'espèce décrite par Baillon n'est qu'une forme, plus vigoureuse, semble-t-il, de l'*U. longifolia* Wedd. (²).

La tige d'*U. Humblotii* H. Bn possède, dans le parenchyme cortical, d'assez nombreux laticifères analogues à ceux que nous avons signalés antérieurement (³) chez l'*U. baccifera* Gaud., espèce de l'Amérique australe. Plus rares dans la région péricyclique et le liber, ces éléments sécréteurs font pour ainsi dire défaut dans la moelle. Ce sont de longs tubes,

(¹) H.-A. Weddell, *Monographie de la famille des Urticées* (*Arch. du Muséum*, t. 9, p. 152-153).

(²) L'*U. longifolia* Wedd. (vernac. *anpi-lela-varec*) est représenté, dans les herbiers du Muséum, par un échantillon de Chapelier. D'après ce dernier, la plante est extrêmement dangereuse, en raison de ses poils urticants, mortelle même pour quelques animaux.

(³) P. Guérin, *Les laticifères de l'*Urera baccifera *Gaud. et leur contenu* (*Bull. Soc. bot. France*, 4ᵉ série, t. 5, 1905, p. 406-411; 5 figures).

d'un parcours presque rectiligne, se ramifiant relativement peu et se distinguant nettement, par leur contenu, des cellules voisines. Ils renferment, noyés dans une substance finement granuleuse, de nombreux petits corps arrondis ou ovoïdes, pouvant atteindre 12^{μ} à 15^{μ} de diamètre et 30^{μ} à 35^{μ} de longueur, isolés ou groupés en masses plus ou moins compactes. De nature albuminoïde, ainsi qu'en témoignent les colorations obtenues avec le réactif de Millon et l'eau iodée, ces corps sont en tous points comparables à ceux que nous avons rencontrés dans les laticifères de l'*U. baccifera* Gaud.

L'axe de l'inflorescence offre une répartition des laticifères identique à celle de la tige. Dans la feuille, ces organes sécréteurs sont nombreux dans le parenchyme des nervures.

L'*U. Humblotii* H. Bn est dépourvu de mucilage, à l'inverse de ce que nous avons signalé autrefois (1) chez un certain nombre d'espèces [*U. caracasana* Griseb. (2), *U. acuminata* Gaud., *U. Schimperi* Wedd., etc.]. Ses cystolithes sont en grappe courte, alors que ceux de l'*U. baccifera* Gaud. sont très allongés, parallèlement à la surface du limbe.

En résumé, l'*Urera Humblotii* H. Bn, qui n'est probablement qu'une forme de l'*U. longifolia* Wedd., possède dans tous ses organes aériens (la racine n'a pas été étudiée), comme l'*U. baccifera* Gaud., un système de laticifères analogue à celui des Morées et des Artocarpées.

L'existence de laticifères chez les *Urera* n'est pas sans intérêt puisque, jusqu'à nos observations, on croyait que ces organes font défaut dans toute la tribu des Urticées.

BOTANIQUE. — *Sur le pouvoir absorbant du sommet des racines.* Note de M. **Henri Coupin**, présentée par M. Gaston Bonnier.

Sur la foi d'expériences, déjà anciennes (90 ans environ), de divers expérimentateurs et, notamment, du savant allemand Ohlert, on admet généra-

---

(1) P. Guérin, *Cellules à mucilage chez les Urticées* (*Bull. Soc. bot. France*, 4e série, t. 10, 1910, p. 399-406; 4 figures).

(2) L'*U. caracasana* Griseb. est bien pourvu de cellules à mucilage, au moins dans la moelle de la tige, mais le parenchyme ligneux n'en contient pas. Il faut, en réalité, rapporter au *Laportea platycarpa* Wedd. les caractères anatomiques que, par suite d'une erreur de notre correspondant du Mexique, nous avons attribué à l'*U. caracasana* Griseb.

lement que les racines ne peuvent absorber les liquides que par leur région moyenne, souvent couverte de *poils* dits *absorbants*, et sont incapables de le faire, ni par leur base dénudée, ni par leur sommet. De nombreuses observations *in situ* m'ayant incité à avoir des doutes sur les résultats de ces expériences, j'en ai entrepris de nouvelles faites avec le plus de soin possible sur le même sujet et je n'ai pas tardé à constater que mon scepticisme était légitime.

Entre de nombreuses cultures faites par moi dans le but de savoir si oui ou non les pointes des racines sont capables d'absorber les sucs nutritifs du sol, je me contenterai, à titre d'exemples, de citer les suivantes, toutes les autres ayant donné *exactement* les mêmes résultats.

Pois gris. — Deux germinations de *Pois gris* ayant, chacune, une gemmule à peine visible et une racine de 3^{cm} de long sont mises dans le même flacon, l'une A simplement suspendue dans l'air humide, l'autre B dans le même air humide, mais plongeant (de 2^{mm} à 3^{mm} environ) la pointe de sa racine dans l'eau placée au fond du récipient. On oblitère l'orifice de celui-ci avec un tampon de coton (de manière à permettre les échanges gazeux avec l'atmosphère extérieure) et l'on met le tout dans une étuve obscure chauffée à 24°. Vingt-quatre heures après, on note que A a une racine de $3^{cm},1$ et B une racine de $3^{cm},5$. On soulève un peu celle-ci de manière que sa pointe seule touche la surface de l'eau. Vingt-quatre heures après, A possède une racine de $3^{cm},5$ (gemmule à peine visible) et B une racine de 5^{cm} (gemmule de $1^{cm},5$).

On remet à nouveau la pointe de celle-ci en contact avec la surface de l'eau. Au bout de vingt-quatre heures, A présente une racine de 4^{cm} (gemmule à peine visible) et B une racine de $5^{cm},7$ portant 2 radicelles de 2^{mm} de long. La pointe de celle-ci remise comme précédemment, au bout de vingt-quatre heures, A a une racine de $4^{cm},2$, avec 3 radicelles (gemmule continuant à être à peine visible), celle de B a 7^{cm} et montre 6 jeunes radicelles (gemmule de $2^{cm},5$). Vingt-quatre heures après, la racine de A est dans le même état, tandis que celle de B (soulevée) atteint $7^{cm},5$ et porte 13 jeunes radicelles (gemmule de $3^{cm},5$). A la 120e heure, A est mourante et B, à nouveau mise en contact par le sommet avec la surface de l'eau, a une racine de $8^{cm},5$, portant 16 jeunes radicelles (gemmule de $4^{cm},5$). Enfin, à la 144e heure, A est morte, tandis que B, mise dans les mêmes conditions que précédemment, montre qu'elle a émis une racine de 9^{cm}, portant 20 radicelles et qu'elle est en continuité avec une gemmule de 6^{cm}, le tout étant en pleine vigueur.

Ricin sanguin. — L'expérience est conduite exactement de la même façon que celle relative au *Pois gris*, c'est-à-dire que l'une des germinations C restait constamment dans l'air humide, tandis que, toutes les 24 heures, la pointe de la racine de la germination D était soulevée de manière que, seule, sa pointe soit en contact avec la surface de l'eau. Voici les chiffres recueillis pendant les 6 jours où ces germinations demeurèrent à l'étuve :

	Germination C.			Germination D.		
	Longueur de la racine.	Nombre de radicelles.	Longueur de l'hypocotyle.	Longueur de la racine.	Nombre de radicelles.	Longueur de l'hypocotyle.
	cm		cm	cm		cm
État initial......	1,5	0	0	2	0	0
Au bout de 24 heures...	1,5	0	0	3,5	10	0
48 » ...	1,5	0	0,5	3,5	10	0
72 » ...	2	0	0,5	4	10	1,5
96 » ...	2	3	0,5	5	25	1,5
120 » ...	2	7	0,5	6,2	30	1,7
144 » ...	2	7 (desséchées)	0,5	7	35	1,8

Févier d'Amérique. — Même marche de l'expérience que pour les deux espèces de graines précédentes, E restant sans cesse dans l'air humide, et F, avec la pointe de la racine, pénétrant seule dans la partie superficielle de l'eau.

	Germination E.			Germination F.		
	Longueur de la racine.	Nombre de radicelles.	Longueur de l'hypocotyle.	Longueur de la racine.	Nombre de radicelles.	Longueur de l'hypocotyle.
	cm		cm	cm		cm
Etat initial......	3	0	0	2	0	0
Au bout de 24 heures...	3	0	0	3	0	0
48 » ...	3	0	0	3	0	1
72 » ...	3	0	0,8	4	0	2
96 » ...	3	0	0,8	4,8	1	2,5
120 » ...		mourante		6,3	5	4
144 » ...		morte		7,2	10	4,2

Potiron. — Même marche des expériences avec la germination G maintenue dans l'air humide et la germination H dont la pointe seule de la racine plonge dans l'eau.

	Germination G.			Germination H.		
	Longueur de la racine.	Nombre de radicelles.	Longueur de l'hypocotyle.	Longueur de la racine.	Nombre de radicelles.	Longueur de l'hypocotyle.
	cm		cm	cm		cm
État initial......	1,5	0	0	1,5	0	0
Au bout de 24 heures...	3	9	0	4,5	9	1
48 » ...	4,5	15	0,25	6,5	21	1,5
72 » ...	6,2	18	0,25	6,7	36	1,8
96 » ...		mourante		13,5	50	2
120 » ...		morte		16,5	55	3

On voit que, dans les quatre exemples que je viens de citer, et auxquels j'aurais pu en ajouter beaucoup d'autres, la plantule dont la pointe de la racine seule est dans l'eau se développe normalement, accroît beaucoup sur pivot, émet copieusement des radicelles, augmente sensiblement la longueur de sa partie aérienne (tige ou hypocotyle, suivant les cas), en un mot acquiert un développement analogue à celui qu'elle pourrait avoir en ayant sa racine plongée intégralement dans le milieu liquide. *A priori*, on pourrait être tenté de croire que cet accroissement est dû à ce que la plantule peut emprunter de l'eau, soit à l'humidité de l'air qui l'entoure, soit à celle qui est contenue dans ses cotylédons ou son albumen. La manière de se comporter de l'autre échantillon, placé exclusivement dans l'air humide et identique à elle quant à son hydratation, prouve qu'il n'en est rien puisque cet échantillon demeure, à peu de chose près, dans son état primitif ou ne manifeste qu'une vitalité très restreinte par rapport à l'autre.

On peut donc émettre les conclusions suivantes :

1° *La racine*, contrairement à ce que disent les ouvrages classiques, *peut absorber l'eau par sa pointe*, laquelle comprend, tout au plus, la coiffe (quand elle existe) et le méristème terminal, auquel on déniait, jusqu'ici, tout pouvoir absorbant.

2° *L'eau que la racine puisse ainsi peut suffire à permettre à la germination d'acquérir le développement maximum* compatible avec la faible quantité d'éléments nutritifs mis, dans mes expériences, à sa disposition et avec la vie à l'obscurité.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *L'ovalbumine constitue un aliment complet pour l'*Isaria densa. Note de M. **Marin Molliard**, présentée par M. Gaston Bonnier.

J'ai montré dans une Note antérieure ([1]) que l'*Isaria densa* est capable d'utiliser les substances protéiques introduites comme source azotée dans un milieu comprenant, d'autre part, les substances minérales reconnues nécessaires à tous les Champignons et une substance sucrée telle que le saccharose. Pour étudier de plus près les transformations subies par les protéines, j'ai cherché tout d'abord à simplifier, autant que possible, le substratum et j'ai été amené à constater que l'entomophyte peut se développer d'une manière normale sur l'ovalbumine seule. Je me suis adressé au produit desséché du commerce, je l'ai fait dissoudre dans de l'eau distillée, puis en ai déterminé la coagulation par la chaleur d'une manière graduée, de façon à obtenir une masse très finement floconneuse; le liquide était filtré sur une étamine et la matière solide fortement pressée; on remettait celle-ci à plusieurs reprises en présence d'eau chaude de manière à la débarrasser, autant qu'il est possible, des impuretés qu'elle peut contenir; dans ces conditions, l'ovalbumine apparaît comme une source à la fois de carbone et d'azote, et elle contient suffisamment de matières minérales, entrant dans sa constitution ou retenues par adsorption, pour assurer le développement du Champignon considéré.

En présence de l'albumine seule, la digestion de celle-ci est beaucoup plus rapide que lorsqu'elle est imprégnée d'une solution sucrée; et à cette transformation plus rapide correspond une oxydation plus considérable du milieu. J'ai évalué l'intensité des phénomènes d'oxydation en déterminant la valeur du quotient respiratoire pour trois milieux différents; l'un était constitué par l'albumine seule, l'autre par de l'albumine additionnée d'une solution saline semblable à celle de Raulin, le troisième comprenait, en outre, 2 pour 100 de saccharose; les cultures étaient faites dans des matras dont le col était muni latéralement d'un tube manométrique; après le semis, l'extrémité du col était fermée à la lampe; le mycélium avait ainsi à sa disposition une quantité limitée d'oxygène; il suffisait de suivre les dénivellations du mercure dans les cultures et de les corriger par les indications

---

([1]) *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 786.

d'un appareil témoin non ensemencé pour se rendre compte que, dans les trois cas, le quotient respiratoire est sensiblement inférieur à l'unité.

Lorsque tout l'oxygène est absorbé, la courbe des dénivellations atteint son minimum ; elle ne remonte sensiblement ensuite que dans le cas où le milieu contient du sucre. Le quotient respiratoire, calculé au moyen de la connaissance de la dénivellation minima, du volume de l'atmosphère mise à la disposition du Champignon et du volume du milieu nutritif dans lequel le gaz carbonique se dissout d'une manière sensible, est égale à 0,55 en présence de l'albumine seule, à 0,63 quand on a ajouté une solution minérale et à 0,82 quand le milieu contient en outre du saccharose. L'ovalbumine est donc très oxydée et les substances minérales interviennent vraisemblablement dans le second cas en cédant une partie de l'oxygène des oxacides.

D'autre part, les phénomènes d'oxydation aboutissent à la constitution d'acide oxalique et son abondante formation est venue jeter dans mon esprit un doute sur la nature du produit dont j'avais observé l'énorme accumulation, à l'état cristallisé, dans les cultures âgées d'*Isaria* effectuées sur des milieux riches en matières protéiques et que j'avais cru pouvoir caractériser comme étant du glycocolle. Parti de l'idée que je devais me trouver en présence d'un acide aminé, j'avais cherché si la substance en question n'offrait pas les réactions d'un de ces acides, et tout a contribué à me faire assimiler au glycocolle ce qui n'est en réalité que de l'oxalate d'ammoniaque; cela tient à des propriétés communes aux deux corps et aussi, en ce qui concerne certaines réactions qualitatives, à la présence de petites quantités de glycocolle dans le produit obtenu à partir de cultures qui étaient effectuées sur des milieux à base de gélatine; le glycocolle était précipité en même temps que l'oxalate d'ammoniaque par l'alcool. La réaction quantitative de Sörensen conduit d'autre part à des résultats très voisins pour les deux substances, le rapport du poids de l'azote au poids moléculaire étant de 0,186 pour le glycocolle et de 0,175 pour l'oxalate d'ammoniaque.

Cette rectification nécessaire étant faite, les nouveaux faits que nous apportons peuvent se résumer ainsi :

1° L'ovalbumine, préparée comme il a été indiqué, satisfait à tous les besoins nutritifs de l'*Isaria densa;*

2° Les phénomènes d'oxydation intense de l'ovalbumine se traduisent par un quotient respiratoire très faible et la formation d'acide oxalique.

BOTANIQUE. — L'*Amygdalopersica Formonti*. Note de MM. G. **Rivière** et G. **Bailhache**, présentée par M. J. Costantin.

Dans une précédente Communication ([1]), relative à l'hybride de greffe désignée sous le nom d'*Amygdalopersica Formonti* (L. Daniel), nous disions que l'amande venue à complète maturité, et que nous supposions être fertile, serait semée, en temps opportun, afin de constater si, dans l'avenir, elle reproduirait, dans sa descendance, les caractères spécifiques de l'un de ses parents, etc.

Cette unique amande a donc été semée (25 avril 1916) par M. Formont, dans l'un de ses jardins de Montreuil, après avoir été préalablement stratifiée, durant quatre mois, et avoir vu sa radicule raccourcie comme il est d'usage en pareille circonstance.

Aujourd'hui nous sommes en présence d'un arbuste, âgé de 3 ans, qui offre « *seulement* » *les caractères d'un amandier*, en ce qui concerne plus particulièrement ses feuilles.

L'amande dont il s'agit, récoltée sur un hybride de greffe, était donc *fertile*. C'est là un point important sur lequel nous nous permettons d'appeler l'attention. Cette fertilité est aujourd'hui attestée par sa postérité.

Nous ajouterons que, en 1917, les branches d'amandier venues spontanément sur les pêchers dont il a déjà été parlé, ayant produit trois nouvelles amandes, celles-ci ont également été confiées à la terre au printemps 1918 et ont donné naissance à trois jeunes amandiers vigoureux.

La fertilité des graines semble donc être un fait normal chez l'*Amygdalopersica Formonti*.

BOTANIQUE. — *Sur les canaux sécréteurs de quelques Gesnéracées et en particulier de ceux de* Monophyllæa Horsfieldii *R. Br.* Note de M. J. **Chifflot**, présentée par M. Guignard.

Solereder ([2]) est le seul auteur qui, à notre connaissance, ait fait, en quelques lignes, mention de la présence de canaux sécréteurs dans la famille des Gesnéracées.

([1]) *Comptes rendus*, t. 161, 1915, p. 497.

([2]) H. Solereder, *Systematische Anatomie der Dikotyledonen*, Ergänzungsband, 1908, p. 246.

Cet auteur a pu les rencontrer dans les quatre espèces du genre *Klugia* et dans l'une des deux espèces du genre *Rhynchoglossum*. Il ne les a pas retrouvés dans le *Rhynchoglossum klugioides* Cl. dont il n'avait que de mauvais échantillons d'herbier, remplis de moisissures (*loc. cit.*).

« Dans la feuille, dit-il, on les rencontre dans les grandes nervures, entre les *deux* faisceaux conducteurs. Dans les petites nervures, ils sont situés vers la pointe du bois du *faisceau conducteur unique*. Dans la tige, ils accompagnent parfois les faisceaux conducteurs médullaires, comme aussi les faisceaux caulinaires et cela du côté du bois. Souvent aussi, ils semblent disposés d'une façon *indépendante des faisceaux libéro-ligneux, dans l'intérieur de la moelle.* »

Le but de cette Note est de vérifier les courtes assertions de Solereder, de compléter et d'étendre à d'autres genres l'étude de la présence et de la localisation des canaux sécréteurs.

Nous n'avons pu, à notre grand regret, étudier le genre *Rhynchoglossum*; mais nous avons examiné les genres *Klugia*, *Gesnera*, *Centrosolenia*, *Rhytidophyllum*, *Tydæa*, *Æschynanthus*, *Streptocarpus*, *Ramondia* et *Monophyllæa*.

De tous ceux-ci, seuls les genres *Klugia* et *Monophyllæa* présentent des canaux sécréteurs dans leurs organes végétatifs, tiges et feuilles; aucun dans les racines.

Le système conducteur de la tige de *Klugia Notoniana* D. C. est formé d'un cercle de faisceaux libéro-ligneux et d'un certain nombre (5 à 7) de faisceaux médullaires. Ces derniers, disposés sans ordre, sont tantôt orientés normalement, tantôt à bois externe, tantôt dans une situation intermédiaire entre ces deux orientations. Les canaux sécréteurs sont localisés, soit très près des pointes de bois primaires des faisceaux caulinaires, soit assez éloignés d'eux dans la moelle. Les plus gros faisceaux seuls sont accompagnés de canaux, et les faisceaux médullaires en sont très rarement pourvus. Dans de nombreuses coupes, je n'en ai observé qu'un seul à la pointe du bois de l'un d'eux.

Dans le pétiole, la disposition des faisceaux, soit périphériques, soit médullaires, reste à peu près semblable à ce qu'elle est dans la tige. Le nombre seul des faisceaux est plus faible. La localisation des canaux sécréteurs rappelle celle que nous avons signalée dans la tige.

Si nous considérons la nervure principale du limbe, on la voit constituée par cinq méristèles (et non par trois comme le veut Solereder) disposées en un cercle avec bois interne. Les canaux sécréteurs sont au nombre de trois; deux sont localisés à la pointe du bois de deux des méristèles, la troisième est située dans le tissu conjonctif qui réunit les méristèles. Il n'y a pas pourtant rien d'absolu, car certaines nervures principales ne possèdent qu'un seul canal, placé à égale distance des pointes de bois des cinq méristèles.

Les nervures secondaires sont formées d'une à trois petites méristèles, deux à la partie supérieure qui parfois se soudent latéralement, une autre à la partie inférieure.

Un seul canal à large lumen existe entre ces méristèles, dans le tissu conjonctif qui les unit.

Le *Monophyllæa Horsfieldii* R. Br. est cette Gesnéracée malaise, curieuse par son appareil végétatif externe, qui consiste en un axe hypocotylé de 20cm à 35cm de hauteur et d'un diamètre de 2cm à 3cm, lequel porte une large feuille cotylédonaire, quelquefois deux, comme nous l'avons montré (1). A l'aisselle de ces feuilles se montrent de nombreuses inflorescences.

La présence et la localisation des canaux sécréteurs, dans l'axe hypocotylé, et dans la ou les feuilles cotylédonaires, rappellent ce que nous avons décrit, plus haut, chez *Klugia Notoniana* D.C. Dans l'axe hypocotylé adulte, le système conducteur consiste en un cercle de faisceaux libéro-ligneux périphériques et d'un très grand nombre de faisceaux médullaires, ceux-ci à orientation variable. Les canaux sécréteurs, petits, sont localisés à la pointe des plus grands faisceaux, comme dans *Klugia*; leurs formes et leurs dimensions sont voisines de ceux de cette espèce.

Les canaux accompagnent rarement les faisceaux médullaires.

La nervure principale très saillante du limbe des feuilles cotylédonaires, montre, en coupe transversale, un arc inférieur de méristèles disposées assez régulièrement, puis de nombreuses méristèles placées plus irrégulièrement du côté supérieur et un très grand nombre, dans la partie centrale. Comme dans l'axe hypocotylé, les canaux sécréteurs sont localisés dans le plan des méristèles et assez éloignés des pointes de bois, dans le parenchyme. Les méristèles centrales n'offrent que peu ou point de canaux sécréteurs.

Les nervures secondaires, toujours très saillantes au-dessous du limbe, possèdent tantôt trois groupes de méristèles, tantôt deux, par suite de soudure latérale. Il n'existe le plus souvent qu'un canal sécréteur à la pointe du bois du groupe inférieur des méristèles. Le groupe supérieur n'en possède pas.

Tous ces canaux sécréteurs, quelles que soient leurs dimensions, contiennent une oléo-résine jaune d'or et odorante.

En résumé, parmi les genres étudiés par Solereder et par nous, on peut conclure :

1° A l'existence manifeste des canaux sécréteurs dans les genres *Klugia*, *Rhynchoglossum* et *Monophyllæa*;

2° A une localisation presque constante de ces canaux à la pointe des faisceaux libéro-ligneux de la tige ou de l'axe hypocotylé ainsi qu'à celle des méristèles, dans les nervures de la feuille, qu'elle soit normale ou cotylédonaire;

3° A l'existence d'une oléo-résine odorante dans tous les canaux.

---

(1) J. Chifflot, *Sur quelques variations du* Monophyllæa Horsfieldii *R. Br.* (*Comptes rendus*, t. 148, 1909, p. 939).

CYTOLOGIE. — *Sur la formation cytologique de l'amidon et de l'huile dans l'oogone des* Chara. Note (¹) de M. **Marcel Mirande**, présentée par M. Guignard.

Par les divers procédés de fixation et de coloration cytologiques, on peut observer, dans le protoplasma de l'œuf jeune des *Chara* et autour du noyau de cet œuf, un grand nombre de granulations qui se colorent comme les nucléoles, et qui ont été aperçues par Debski en 1898. Cet auteur considère ces corpuscules comme constitués par une substance identique à celle des nucléoles et analogues à ceux que l'on aperçoit, autour des noyaux, dans les cellules initiales de l'appareil végétatif de la plante. Dans une Note récente (²) j'ai exprimé l'opinion que ces corpuscules, dits nucléolaires, des cellules initiales végétatives ne sont autre chose que les futurs chloroplastes de la plante. Mes observations me portent à admettre également que, dans l'œuf des *Chara*, ces corpuscules ne sont autre chose que de futurs amyloplastes périphériques représentant une couche de chloroplastes qui, dans la cellule-œuf, ne verdissent pas.

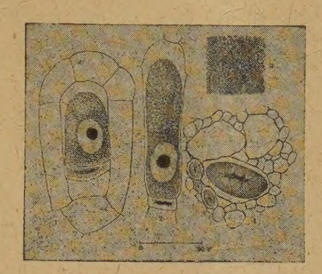
Par le moyen des méthodes mitochondriales, surtout par la méthode de Regaud suivie de la coloration à l'hématoxyline, on met en lumière des faits nouveaux et intéressants sur le mode de formation, jusqu'ici ignoré, de la riche réserve amylacée de l'oogone des *Chara*.

Dans la jeune cellule-œuf, au noyau volumineux, le protoplasme est bourré de mitochondries granuleuses ou en très courts bâtonnets qui, peu à peu, se creusent d'une vésicule claire (*fig*. 1, 2). Dès que l'oogone commence à subir sa torsion spiralée, les mitochondries de l'œuf atteignent une taille plus grande, beaucoup ont une forme allongée, les vésicules sont plus grosses (*fig*. 3). Jusque-là, le manteau mitochondrial n'est pas coloré en noir intense, la vésicule est peu réfringente, et son contenu, qui est de l'amidon en formation, ne se colore pas encore à l'iode. A un stade ultérieur, succédant rapidement au précédent, les grains d'amidon, ronds, ovoïdes, plus ou moins allongés, sont déjà assez gros, se colorent enfin à l'iode, et montrent enfin, en lumière polarisée, la croix obscure qui caractérise leurs propriétés biréfringentes. Tous ces grains sont contenus dans

(¹) Séance du 3 mars 1919.

(²) *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 283.

leur enveloppe mitochondriale maintenant fortement colorée en noir par l'hématoxyline et, en contact les uns avec les autres, forment une masse très dense. A la maturité de l'oogone, l'œuf est complètement bourré de grains d'amidon de toutes tailles, sauf autour du noyau et, à l'apex, sous



la coronule, où se trouve une masse protoplasmique sans amidon constituant la *tache réceptrice*. Les manteaux mitochondriaux, en contact serré, forment un pseudo-tissu cellulaire avec méats, d'où l'on peut, par une légère pression, faire sortir les grains d'amidon de leurs alvéoles. La figure 4 montre un fragment de ce pseudo-parenchyme mitochondrial dans lequel quelques grains d'amidon, contractés par déshydratation par l'alcool, se sont décollés des parois.

Outre l'amidon, la cellule-œuf produit une quantité considérable d'huile; il faut étudier cette substance au moyen d'un fixateur osmique qui l'insolubilise, la durcit et la colore en noir. Dès les premiers stades de l'œuf, l'huile apparaît sous la forme de gouttelettes très fines mélangées avec les mitochondries amylogènes et qui augmentent peu à peu de grosseur. A la maturité de l'oogone, l'huile est emmagasinée dans les méats du pseudo-tissu mitochondrial. Cette substance ne paraît pas être engendrée par des mitochondries spéciales; peut-être est-elle excrétée par les mitochondries amylogènes elles-mêmes.

EMBRYOGÉNIE. — *Sur les changements qu'on observe dans la reproduction et le développement des Bombyx polyvoltins de Chine lorsqu'ils sont transportés et élevés en France.* Note de M. A. Lécaillon, présentée par M. Henneguy.

En élevant côte à côte, dans les mêmes conditions de milieu, des Polyvoltins de Chine, des Univoltins typiques, des Bivoltins accidentels et des

descendants de ces derniers Bombyx, j'ai pu comparer la reproduction et le développement de ces divers représentants d'une espèce qui se prête très avantageusement à l'étude des questions concernant la variabilité des êtres vivants. Les Polyvoltins que j'ai observés appartenaient à la race élevée à la station de sériciculture de Montpellier depuis une trentaine d'années et devenue bivoltine avec tendance à l'univoltinisme ([1]); ils présentèrent les particularités suivantes :

Le premier couple de Papillons qui naquit du groupe des 25 cocons de deuxième génération dont je pus disposer en 1917 parut le 9 août de cette même année. Il produisit uniquement des *œufs d'hiver* ([2]), lesquels présentèrent exactement les caractères que j'ai indiqués précédemment au sujet des œufs désignés par le même nom chez les autres Bombyx que j'ai étudiés.

Le 25 avril 1918, les œufs d'hiver dont il vient d'être question commencèrent à éclore, produisant des chenilles qui donnèrent naissance à des Papillons (première génération de 1918) dont tous les œufs furent au contraire des *œufs d'été*. Ceux-ci possédaient aussi les mêmes caractères que les œufs de même nom observés par moi chez les autres Bombyx, avec cette seule différence que les changements de coloration qui survinrent pendant la période du développement de l'embryon à l'intérieur de ces œufs furent encore plus réduits que dans les œufs qui engendrent les Bivoltins accidentels ou les œufs d'été que pondent les descendants directs de ceux-ci. C'est à peine si, sur 300 ou 400 œufs composant chaque ponte, il me fut possible d'en trouver quelques-uns présentant, pendant la période du développement qui précède le moment où la larve est visible par transparence au travers du chorion, quelques traces de coloration rose.

Les Papillons (deuxième génération de 1918) qui dérivèrent des œufs d'été se comportèrent différemment au point de vue de la descendance directe. La plupart pondirent des *œufs d'hiver*, qui n'écloront, par conséquent, qu'au printemps 1919. Mais quelques couples produisirent au contraire une deuxième série d'*œufs d'été*, c'est-à-dire, en réalité, des sujets qu'on peut appeler *Trivoltins accidentels*, par analogie avec les Bivoltins accidentels qui dérivent des races univoltines.

L'élevage de cette troisième génération dut se faire nécessairement à

([1]) Voir à ce sujet : *Comptes rendus*, t. 165, 1917, p. 800.

([2]) Sur le sens que je donne aux expressions *œufs d'hiver* et *œufs d'été*, voir *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 366.

une époque de l'année déjà très avancée, à une température insuffisamment élevée, de sorte que les Papillons qui en résultèrent naquirent seulement à partir du 12 novembre 1918. Dans de telles conditions, l'accouplement des Bombyx devint impossible, ou bien, quand il se produisit, les œufs pondus par les femelles ne furent pas fécondés. Toutefois, en maintenant *artificiellement* plusieurs couples de ces Papillons à une température suffisamment élevée, j'obtins un certain nombre d'œufs qui présentèrent les caractères habituels des œufs d'hiver et dont l'éclosion aura lieu, probablement, en avril 1919.

Il résulte de ces faits que, chez les Polyvoltins de Chine auxquels j'ai eu affaire, il ne peut se développer complètement, sous le climat toulousain, que deux générations chaque année. Mais certains sujets de la deuxième génération peuvent produire une troisième génération qu'on peut élever entièrement en ayant recours à un relèvement artificiel de la température. Dans cette race, il y a aussi des œufs d'hiver et des œufs d'été fondamentalement différents par leur composition chimique et par les particularités qui y apparaissent quand l'embryon s'y développe.

Il est d'ailleurs visible que cette dernière conclusion peut s'étendre à toutes les races bivoltines ou polyvoltines, et que partout, sous l'influence directe du climat, le nombre de générations peut croître, jusqu'à une certaine limite, à mesure que la production de nouvelles pontes d'œufs d'été peut se répéter davantage ([1]). De plus, il semble certain aussi que le phénomène en question est entièrement réversible, le nombre de générations possible rétrogradant à mesure que les races polyvoltines sont soumises à l'élevage dans des contrées à climat de plus en plus froid.

M. A. **Perrin** adresse une Note sur la résolution mécanique du problème principal de la Balistique extérieure.

(Renvoyée à la Commission de Balistique.)

A 16 heures et quart l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 18 heures.

É. P.

([1]) Selon Maillot et Lambert (*Traité sur le ver à soie du mûrier*, 1906, p. 12), il pourrait y avoir jusqu'à 8 ou 9 générations chez certaines races polyvoltines.

ERRATA.

(Séance du 17 février 1919.)

Note de M. *Jules Drach*, Sur l'intégration par quadratures, etc. :

Page 340, ligne 15, *au lieu de* sont uniformes, *lire* sont parfois uniformes.

(Séance du 3 mars 1919.)

Note de M. *André Blondel*, Oscillations libres des alternateurs sur réseau à tension constante :

Page 441, ajouter au second membre des deux équations (8) et (9) respectivement le terme $+ E_{md}$ et le terme $+ E_{mt}$: ces deux termes représentant respectivement les forces électromotrices des excitatrices quand il n'y a pas d'oscillations.